

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2012 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の各問に答えよ。

(1) a が正の実数のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{1/n}$$

を求めよ。

(2) 定積分

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$$

の値を求めよ。

第 2 問

正四面体 $OABC$ において、点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする。 $\triangle PRQ$ が正三角形ならば、3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

第 3 問

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

第 4 問

- (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ.
- (2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で, $P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする. このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ.

第 5 問

次の命題 (p),(q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ．正しいければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば， n は 3 の倍数である．

(q) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において， $AC < AD$ かつ $BC < BD$ ならば， $\angle C > \angle D$ である．

第 6 問

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を定める.

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1 + \sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)