

京都大学 2012 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の各問に答えよ。

(1) a が正の実数のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{1/n}$$

を求めよ。

(2) 定積分

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$$

の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $a \leq 1$ と $a > 1$ に分ける。 $0 < a \leq 1$ では $1 + a^n$ が 1 と 2 の間に挟まれるので、その $1/n$ 乗をはさみうちする。 $a > 1$ では a^n をくくり出し、残った因子が 1 へ近づくことを示す。(2) は $u = \log \sqrt{1+x^2}$ 、 $dv = x^{-2} dx$ とする部分積分で、対数を微分して $1/(1+x^2)$ に落とす。端点での対数値と $\arctan$ の値を丁寧に代入する。

【解答】

(1) まず $0 < a \leq 1$ とする。このとき

$$1 \leq 1 + a^n \leq 2$$

だから

$$1 \leq (1 + a^n)^{1/n} \leq 2^{1/n}.$$

$2^{1/n} \rightarrow 1$ より、はさみうちによって極限は 1 である。

次に $a > 1$ とする。このとき

$$(1 + a^n)^{1/n} = a \left(1 + \frac{1}{a^n} \right)^{1/n}.$$

また

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{a^n} \right)^{1/n} \leq 2^{1/n}$$

であり、両端が 1 に収束する。したがって極限は a である。

以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{1/n} = \begin{cases} 1 & (0 < a \leq 1), \\ a & (a > 1) \end{cases}$$

となる。

(2) 求める積分を

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$$

とおく。部分積分で

$$u = \log \sqrt{1+x^2}, \quad dv = \frac{dx}{x^2}$$

とすれば

$$du = \frac{x}{1+x^2} dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

だから

$$I = \left[-\frac{1}{x} \log \sqrt{1+x^2} \right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

後半の積分では $x = \tan t$ とおく。端点は $t = \pi/4, \pi/3$ に対応し、

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt = \frac{\pi}{12}.$$

また境界項は

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2$$

である。したがって

$$I = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \log 2 + \frac{\pi}{12}.$$

▶ 解法 2 (対数化と三角置換)

【方針】

(1) は正の数列の対数を取り、 $a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ に分けて指数部の極限を求める。(2) は最初に $x = \tan t$ と置いて積分を $\log(\sec t) \csc^2 t$ に変え、部分積分する。元の変数で部分積分する主解法とは計算の見通しが異なる。

【解答】

(1)

$$L_n = (1+a^n)^{1/n}$$

とおく。 $0 < a < 1$ のとき

$$0 \leq \log L_n = \frac{1}{n} \log(1+a^n) \leq \frac{\log 2}{n} \rightarrow 0$$

であるから $L_n \rightarrow 1$ である。 $a = 1$ のときも $L_n = 2^{1/n} \rightarrow 1$ である。

$a > 1$ のときは

$$\begin{aligned} \log L_n &= \frac{1}{n} \log\{a^n(1+a^{-n})\} \\ &= \log a + \frac{1}{n} \log(1+a^{-n}). \end{aligned}$$

第 2 項は

$$0 \leq \frac{1}{n} \log(1+a^{-n}) \leq \frac{\log 2}{n} \rightarrow 0$$

なので $\log L_n \rightarrow \log a$ 、したがって $L_n \rightarrow a$ である。ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{1/n} = \begin{cases} 1 & (0 < a \leq 1), \\ a & (a > 1) \end{cases}$$

となる。

(2)

$$x = \tan t$$

とおくと、 $x = 1, \sqrt{3}$ は $t = \pi/4, \pi/3$ に対応する。また

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t} dt = \csc^2 t dt, \quad \log \sqrt{1+x^2} = \log(\sec t).$$

よって

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \log(\sec t) \csc^2 t dt.$$

ここで

$$u = \log(\sec t), \quad dv = \csc^2 t dt$$

とすると

$$du = \tan t dt, \quad v = -\cot t.$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= [-\cot t \log(\sec t)]_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot t \tan t dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 + [t]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \log 2 + \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 4、目安時間 15 分。極限は $a = 1$ を含めて $0 < a \leq 1$ と $a > 1$ に分けるのが自然で、どちらもはさみうちで処理できる。積分は対数部分を微分すると $x/(1+x^2)$ になり、 x^{-2} の原始関数 $-1/x$ とちょうど噛み合う。端点 $1, \sqrt{3}$ での $\log \sqrt{1+x^2}$ と $\arctan$ の値を取り違えないことが得点上の注意点である。

【第 2 問】

正四面体 $OABC$ において、点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする。△ PRQ が正三角形ならば、3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

【方針】

正四面体の 1 辺を 1 に規格化し、 $OP = x, OQ = y, OR = z$ と置く。 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ なので余弦定理で PQ^2, QR^2, RP^2 を x, y, z で表せる。正三角形条件から 3 つの長さが等しい。 x, y, z のうち最大のものを x としてよいので、等式の因数分解で正の因子を消し、 $x = z$ 、続いて $x = y$ を導く。最後に 3 点が各辺を同じ比で内分するため、対応する辺が底面の辺に平行であることを相似で述べる。

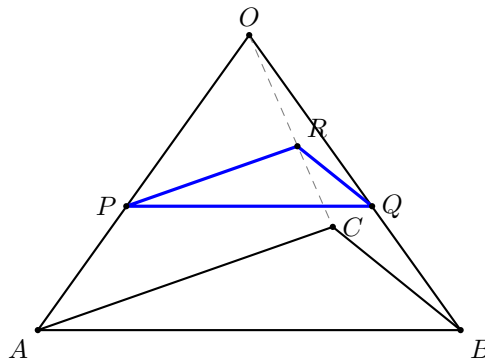
【解答】

正四面体の 1 辺の長さを 1 としてよい。点 P, Q, R は頂点ではないので $OP = x, OQ = y, OR = z$ とおくと $0 < x, y, z < 1$ である。

正四面体では $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ である。したがって余弦定理より $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy$ であり、同様に $QR^2 = y^2 + z^2 - yz, RP^2 = z^2 + x^2 - zx$ である。△ PRQ は正三角形なので $PQ^2 = QR^2 = RP^2$ である。 x, y, z のうち最大のものを、文字の名前を入れ替えて x としてよい。すなわち $x \geq y, x \geq z$ として考える。

まず $PQ^2 = QR^2$ より $x^2 + y^2 - xy = y^2 + z^2 - yz$ である。整理すると $x^2 - xy - z^2 + yz = 0$ すなわち $(x - z)(x + z - y) = 0$ である。ここで $x \geq y$ かつ $z > 0$ だから $x + z - y > 0$ である。よって $x = z$ を得る。

次に $QR^2 = RP^2$ より $y^2 + z^2 - yz = z^2 + x^2 - zx$ であり、整理して $y^2 - yz - x^2 + zx = 0$ すなわち $(y - x)(x + y - z) = 0$ である。いま $z = x$ なので $x + y - z = y > 0$ である。したがって $y = x$ を得る。以上より $x = y = z$ である。同じ内分比になった後の位置関係は次のようになる。



したがって P, Q, R はそれぞれ OA, OB, OC を同じ比で内分する点である。このとき三角形 OPQ と OAB は相似であり、 $PQ \parallel AB$ である。同様に $QR \parallel BC, RP \parallel CA$ である。よって 3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ AB, BC, CA に平行である。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。正四面体の対称性を長さの式に落とし、正三角形条件から内分比が等しいことを示す問題である。最大の変数を 1 つ選ぶことで、因数分解後にどちらの因子が 0 かを迷わず決められる。最後は $x = y = z$ が出た時点で終わりにせず、同じ比で内分する点を結ぶ線分は対応する辺に平行である、という相似の説明まで書くと証明として完結する。

【第 3 問】

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

【方針】

与式と条件が対称式なので、 $s = x + y$ 、 $p = xy$ に置き換える。条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ から $p = s^2 - 6$ と表せ、求める式も s だけの 3 次式になる。ただし任意の s が許されるわけではないので、 x, y が実数として存在する条件を、2 次方程式 $X^2 - sX + p = 0$ の判別式で求める。最後は閉区間上の 3 次関数の最大最小として、端点と臨界点を比較する。

【解答】

$s = x + y$ 、 $p = xy$ とおく。すると $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = s^2 - p$ であるから、条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ は $s^2 - p = 6$ すなわち $p = s^2 - 6$ と表せる。

求める式を E とおくと $E = x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$ である。ここで $x^2y + xy^2 = xy(x + y) = ps$ であり、また $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = s^2$ なので $E = ps - s^2 + s$ である。 $p = s^2 - 6$ を代入して $E = s(s^2 - 6) - s^2 + s = s^3 - s^2 - 5s$ を得る。

次に s の範囲を求める。実数 x, y が和 s 、積 p をもつことは、2 次方程式 $X^2 - sX + p = 0$ が実数解をもつことと同値である。したがって判別式が 0 以上でなければならない。 $s^2 - 4p \geq 0$ に $p = s^2 - 6$ を代入すると $s^2 - 4(s^2 - 6) \geq 0$ すなわち $24 - 3s^2 \geq 0$ である。よって $-2\sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2}$ である。

以上より、求める値の範囲は $F(s) = s^3 - s^2 - 5s$ の $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ における値域である。微分すると $F'(s) = 3s^2 - 2s - 5 = (3s - 5)(s + 1)$ である。したがって区間内の臨界点は $s = -1$ 、 $s = \frac{5}{3}$ である。

端点と臨界点での値を調べると $F(-2\sqrt{2}) = -8 - 6\sqrt{2}$ 、 $F(-1) = 3$ 、

$$F\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{25}{3} = -\frac{175}{27},$$

$F(2\sqrt{2}) = -8 + 6\sqrt{2}$ である。これらを比較すると最小値は $-8 - 6\sqrt{2}$ 、最大値は 3 である。

したがって取りうる値の範囲は $-8 - 6\sqrt{2} \leq x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y \leq 3$ である。

【総評】 難度 6、目安時間 20 分。対称式を $s = x + y$ 、 $p = xy$ に直すと、条件も目的式も一気に整理される。重要なのは、 $p = s^2 - 6$ と出した後で、実数 x, y が存在するための判別式条件を必ず入れること。最大最小では端点 $\pm 2\sqrt{2}$ と臨界点 $-1, 5/3$ の 4 点を比較する。特に最大値 3 は内部点 $s = -1$ で出るため、端点だけを見ると誤る。

【第 4 問】

- (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。
 (2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で、 $P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ。

【方針】

(1) は $\sqrt[3]{2}$ を既約分数と仮定し、3 乗して 2 の素因数の指数を比較する背理法で示す。(2) は $P(x)$ を $x^3 - 2$ で割った余り $ax^2 + bx + c$ を考える。 $\alpha = \sqrt[3]{2}$ を代入すると余りも 0 になるので、 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ を得る。 $a = 0$ の場合は (1) に反し、 $a \neq 0$ の場合は式に α を掛けたものと元の式から α が有理数になるか、または $(b/a)^3 = 2$ となって (1) に反する。したがって余りは 0 である。

【解答】

(1) $\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定する。すると、互いに素な正の整数 p, q を用いて $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$ と書ける。両辺を 3 乗すると $2 = \frac{p^3}{q^3}$ であるから $p^3 = 2q^3$ である。よって p^3 は 2 で割り切れるので、 p も 2 で割り切れる。 $p = 2r$ とおくと $8r^3 = 2q^3$ より $q^3 = 4r^3$ である。したがって q^3 も 2 で割り切れ、 q も 2 で割り切れる。

これは p, q が互いに素であることに反する。よって $\sqrt[3]{2}$ は無理数である。

(2) $\alpha = \sqrt[3]{2}$ とおく。 $P(x)$ を $x^3 - 2$ で割った商を $Q(x)$ 、余りを $R(x)$ とすると $P(x) = (x^3 - 2)Q(x) + R(x)$ である。余りは高々 2 次なので、有理数 a, b, c を用いて $R(x) = ax^2 + bx + c$ と書ける。 $P(\alpha) = 0$ であり、 $\alpha^3 - 2 = 0$ であるから $R(\alpha) = 0$ である。すなわち $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ である。

まず $a = 0$ の場合を考える。このとき $b\alpha + c = 0$ である。もし $b \neq 0$ なら $\alpha = -\frac{c}{b}$ となり α が有理数になるので、(1) に反する。したがって $b = 0$ でなければならず、さらに $c = 0$ である。

次に $a \neq 0$ と仮定する。式 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ に α を掛けると、 $\alpha^3 = 2$ より $b\alpha^2 + c\alpha + 2a = 0$ を得る。元の式とこの式から α^2 を消去する。具体的には、元の式に b を掛け、後の式に a を掛けて引くと $(b^2 - ac)\alpha + (bc - 2a^2) = 0$ である。

もし $b^2 - ac \neq 0$ なら $\alpha = -\frac{bc - 2a^2}{b^2 - ac}$ となり α が有理数になる。これは (1) に反する。よって $b^2 - ac = 0$, $bc - 2a^2 = 0$ でなければならない。

この 2 式から $ac = b^2$, $bc = 2a^2$ である。第 1 式に b を掛けると $abc = b^3$ であり、第 2 式に a を掛けると $abc = 2a^3$ である。したがって $b^3 = 2a^3$ となる。 $a \neq 0$ だから $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$ である。ところが b/a は有理数なので、これは $\sqrt[3]{2}$ が有理数であることを意味し、(1) に反する。

したがって $a \neq 0$ はありえない。結局 $a = b = c = 0$ であり、余り $R(x)$ は 0 である。よって $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れるである。

【総評】 難度 6、目安時間 20 分。前半の無理数証明は基本だが、後半ではそれを余りの消去に使う。 $P(x)$ を $x^3 - 2$ で割った余りを 2 次以下にして、 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ から矛盾を作る流れが核心である。 $a = 0$ の線形の場合と $a \neq 0$ の場合を分け、後者では α^2 を消去して α が有理数になる可能性を先に潰すと、論理が整理される。

【第 5 問】

次の命題 (p),(q) のそれぞれについて、正しいかどうか答えよ。正しいければ証明し、正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば、 n は 3 の倍数である。

(q) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において、 $AC < AD$ かつ $BC < BD$ ならば、 $\angle C > \angle D$ である。

【方針】

(p) は文系第 4 問と同じく円周角と中心角の関係で示す。(q) は 2 点 A, B からの距離がともに大きい点の方が、必ずしも線分 AB を小さい角で見るとは限らないことを、具体的な三角形で反例にする。 AB を 1 に固定し、 C と D で $AC < AD$ 、 $BC < BD$ を満たしつつ、余弦定理で $\angle C < \angle D$ となるように選ぶ。

【解答】

(p) 正しい。

正 n 角形の頂点は同一円周上にある。隣り合う頂点に対応する中心角は $\frac{360^\circ}{n}$ である。

選んだ 3 点でできる三角形の内角の 1 つが 60° であるとする。この角が見込む弧の中心角は、円周角の定理より 120° である。その弧は正 n 角形の頂点間隔を整数個集めたものなので、ある整数 k について $120^\circ = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$ である。よって $n = 3k$ となり、 n は 3 の倍数である。

(q) 正しくない。

反例を挙げる。 $AB = 1$ とし、三角形 ABC が $AC = 5$, $BC = \frac{11}{2}$ を満たすようにする。また三角形 ABD が $AD = 6$, $BD = 6$ を満たすようにする。いずれも三角不等式を満たすので、このような三角形は存在する。

このとき $AC = 5 < 6 = AD$, $BC = \frac{11}{2} < 6 = BD$ であり、命題の仮定は満たされている。

一方、余弦定理より、 $\angle C = \angle ACB$ について

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{25 + \frac{121}{4} - 1}{2 \cdot 5 \cdot \frac{11}{2}} = \frac{217}{220}$$

である。また、 $\angle D = \angle ADB$ について

$$\cos D = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot BD} = \frac{36 + 36 - 1}{72} = \frac{71}{72}$$

である。

ここで $\frac{217}{220} > \frac{71}{72}$ である。三角形の内角は 0° から 180° の間にあり、この範囲では余弦が大きいほど角は小さい。したがって $\angle C < \angle D$ である。

よって、仮定 $AC < AD$ 、 $BC < BD$ を満たしても $\angle C > \angle D$ とは限らない。命題 (q) は正しくない。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。(p) は円周角の定理を正 n 角形の等間隔性と結びつけるだけでよい。(q) は直感に反する反例を数値で示す問題で、距離が 2 本とも長いからといって見込む角が小さくなるとは限らない。反例では三角形の存在、仮定 $AC < AD$ 、 $BC < BD$ 、結論の否定 $\angle C < \angle D$ をそれぞれ確認することが重要である。

【第 6 問】

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を定める.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ.

【方針】

目標区間の下端を $L = (1 + \sqrt{3})/2$ 、上端を $U = 1 + \sqrt{3}$ と置く. Y_k は常に正なので、 $X_n = 1, 2, 3$ 以上 の場合に分け、 $L \leq Y_n \leq U$ となる条件を Y_{n-1} への条件に直す. 目的確率そのものだけでは閉じないため、 $A_n = P(Y_n \leq U)$ 、 $B_n = P(Y_n \geq L)$ を導入する. A_n と B_n の漸化式を立て、和 $S_n = A_n + B_n$ で 1 本の漸化式にして解き、最後に $p_n = (A_{n-1} + B_{n-1})/6$ に戻す.

【解答】

$L = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $U = 1 + \sqrt{3}$ とおく. すべての k で $Y_k > 0$ であることに注意する. $n \geq 2$ とし、直前の値 Y_{n-1} を y と書く.

まず $X_n = 1$ のとき $Y_n = 1 + \frac{1}{y}$ である. $L \leq Y_n \leq U$ となる条件を調べる. 上限条件は $1 + \frac{1}{y} \leq U$ であり、これは $\frac{1}{y} \leq \sqrt{3}$ すなわち $y \geq 1/\sqrt{3}$ である. これは $y \geq 1$ から常に成り立つ. 下限条件は $1 + \frac{1}{y} \geq L$ である. これは $\frac{1}{y} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{U}$ と同値なので $y \leq U$ である. したがって $X_n = 1$ のときは、 $Y_{n-1} \leq U$ でちょうど目的区間に入る.

次に $X_n = 2$ のとき $Y_n = 2 + \frac{1}{y}$ である. 下限 L は常に満たされる. 上限条件 $2 + \frac{1}{y} \leq U$ は $\frac{1}{y} \leq \sqrt{3} - 1$ すなわち $y \geq \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = L$ と同値である. したがって $X_n = 2$ のときは、 $Y_{n-1} \geq L$ でちょうど目的区間に入る. $X_n \geq 3$ のときは $Y_n \geq 3 > U$ なので、目的区間には入らない.

そこで $A_n = P(Y_n \leq U)$, $B_n = P(Y_n \geq L)$ とおく. 上の考察から、 $n \geq 2$ では $p_n = P(L \leq Y_n \leq U) = \frac{A_{n-1} + B_{n-1}}{6}$ である.

次に A_n, B_n の漸化式を作る. $Y_n \leq U$ となるには、 $X_n = 1$ なら常に可能で、 $X_n = 2$ なら $Y_{n-1} \geq L$ が必要十分である. $X_n \geq 3$ では不可能である. よって $A_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}B_{n-1}$ である.

また $Y_n \geq L$ となるには、 $X_n \geq 2$ なら常に可能で、 $X_n = 1$ なら $Y_{n-1} \leq U$ が必要十分である. したがって $B_n = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}A_{n-1}$ である. $S_n = A_n + B_n$ とおくと $S_n = 1 + \frac{1}{6}S_{n-1}$ を得る. 初期値は $Y_1 = X_1$ より $A_1 = P(X_1 \leq U) = P(X_1 = 1, 2) = \frac{1}{3}$ であり、 $B_1 = P(X_1 \geq L) = P(X_1 = 2, 3, 4, 5, 6) = \frac{5}{6}$ だから $S_1 = \frac{7}{6}$ である.

漸化式 $S_n = 1 + S_{n-1}/6$ の定常値は $S = 1 + \frac{1}{6}S$ より $S = 6/5$ である. したがって $S_n - \frac{6}{5} = \frac{1}{6}(S_{n-1} - \frac{6}{5})$ であり、 $S_1 - \frac{6}{5} = \frac{7}{6} - \frac{6}{5} = -\frac{1}{30}$ だから $S_n = \frac{6}{5} - \frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ である. $n \geq 2$ では

$$p_n = \frac{S_{n-1}}{6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{180}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30 \cdot 6^{n-1}}$$

である.

最後に $n = 1$ を確認する. このとき $Y_1 = X_1$ であり、 $L \leq X_1 \leq U$ を満たすさいころの目は 2 だけである. よって $p_1 = \frac{1}{6}$ である. 一方、上の式に $n = 1$ を代入すると $\frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$ となるので、同じ式が成り立つ.

したがって、すべての正の整数 n について $p_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{30 \cdot 6^{n-1}}$ である.

【総評】 難度 7、目安時間 25 分. 連分数型の確率をそのまま追うのではなく、上端以下の確率 A_n と下端以上の確率 B_n を導入して閉じた漸化式にするのが決定的である. $X_n = 1$ と $X_n = 2$ で目的区間に入る条件がそれぞれ $Y_{n-1} \leq U$ 、 $Y_{n-1} \geq L$ になることを、不等式変形で明示したい. 最後は $S_n = A_n + B_n$ にまとめると計算が短くなるが、 $n = 1$ だけは別確認して一般式に合うことを書く安全である.