

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2017 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

w を 0 でない複素数とし、実数 x, y を

$$w + \frac{1}{w} = x + yi$$

によって定める。

(1) $R > 1$ を満たす実数 R を定数とする。 w が絶対値 R の複素数全体を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 α を定数とする。 w が偏角 α の複素数全体を動くとき、 xy 平面上的点 (x, y) の軌跡を求めよ。

第 2 問

四面体 $OABC$ を考える。点 D, E, F, G, H, I は、それぞれ辺
 OA, AB, BC, CO, OB, AC
上にあり、頂点ではないとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば

$$AE : EB = CF : FB$$

であることを示せ。

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき、これらの点は $OABC$ の各辺の中点であり、 $OABC$ は正四面体であることを示せ。

第 3 問

p, q を自然数、 α, β を

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする。このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

第 4 問

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、

$$\angle A = \frac{\pi}{3}$$

であるとする。また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

- (1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき、 $\angle BPC$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ。

第 5 問

$a \geq 0$ とする。 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で、曲線

$$y = xe^{-x},$$

直線 $y = ax$ 、直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

このとき、 $S(a)$ の最小値を求めよ。

ここで「囲まれた部分」とは、上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。

第 6 問

n を自然数とする。 n 個の箱すべてに、1、2、3、4、5 の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ、計 5 枚入っている。

各箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。

このとき、 X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)