

京都大学 2017 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

w を 0 でない複素数とし、実数 x, y を

$$w + \frac{1}{w} = x + yi$$

によって定める。

(1) $R > 1$ を満たす実数 R を定数とする。 w が絶対値 R の複素数全体を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 α を定数とする。 w が偏角 α の複素数全体を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

w を極形式で表す。(1) では $|w| = R$ を固定し、偏角を動かすと x, y が $\cos \theta, \sin \theta$ の定数倍で表されるので楕円になる。(2) では偏角 α を固定し、 $|w| = r$ を正に動かす。 $r + 1/r$ と $r - 1/r$ の間の恒等式から双曲線を得るが、 $r + 1/r \geq 2$ により右側の 1 枝だけであることを確認する。

【解答】

(1) $|w| = R$ なので $w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおける。このとき $\frac{1}{w} = \frac{1}{R}(\cos \theta - i \sin \theta)$ である。したがって

$$w + \frac{1}{w} = \left(R + \frac{1}{R}\right) \cos \theta + i \left(R - \frac{1}{R}\right) \sin \theta$$

であり、

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right) \cos \theta, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right) \sin \theta$$

である。 $R > 1$ よりどちらの係数も正であるから、 θ を動かすと軌跡は

$$\frac{x^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

で表される楕円である。

(2) 偏角が α であるから、 $r > 0$ を用いて $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ とおける。このとき $\frac{1}{w} = \frac{1}{r}(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ である。よって

$$w + \frac{1}{w} = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \alpha + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \alpha$$

である。

ここで $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4$ だから

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin \alpha}\right)^2 = 4$$

を得る。さらに $r > 0$ より $r + \frac{1}{r} \geq 2$ であり、 $0 < \alpha < \pi/2$ なので $\cos \alpha > 0$ である。したがって $x \geq 2 \cos \alpha$ も必要である。

逆に、この双曲線上で $x \geq 2 \cos \alpha$ を満たす点については、 $r + 1/r = x/\cos \alpha \geq 2$ となる正の r が存在し、対応する y も上式で決まる。よって求める軌跡は

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 4, \quad x \geq 2 \cos \alpha$$

で表される双曲線の右側の枝である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は $w = u + vi$ と直交座標で置き、 $|w| = R$ を直接用いて x, y が u, v の定数倍になることから楕円を得る。(2) は $x/\cos \alpha$ と $y/\sin \alpha$ を作り、その差の平方が 4 になる恒等式と符号条件で双曲線の右枝に限定する。

【解答】

(1) $w = u + vi$ とおく。 $|w| = R$ より

$$u^2 + v^2 = R^2, \quad \frac{1}{w} = \frac{u - vi}{R^2}.$$

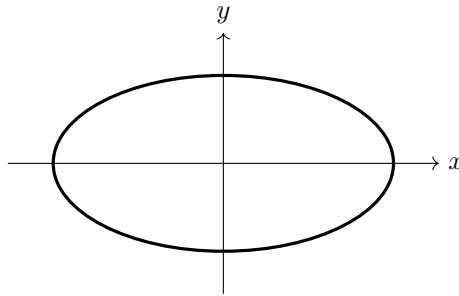
したがって

$$x = \left(1 + \frac{1}{R^2}\right)u, \quad y = \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)v.$$

これを $u^2 + v^2 = R^2$ へ代入すると

$$\frac{x^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1.$$

$R > 1$ なので退化せず、軌跡はこの楕円全体である。



(2) w の偏角が α なので、ある $r > 0$ により

$$w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

実部・虚部から

$$\frac{x}{\cos \alpha} = r + \frac{1}{r}, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = r - \frac{1}{r}.$$

両式の平方の差をとると

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 4.$$

さらに相加相乗平均より

$$\frac{x}{\cos \alpha} = r + \frac{1}{r} \geq 2.$$

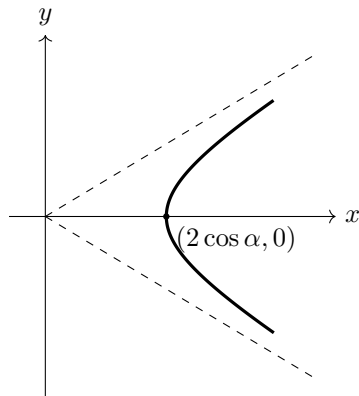
$0 < \alpha < \pi/2$ だから

$$x \geq 2 \cos \alpha.$$

よって軌跡は

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 4, \quad x \geq 2 \cos \alpha$$

で表される双曲線の右枝である。



【総評】 難度 5, 計算量 4。目安時間は 18 分。どちらも極形式に直せば, 実部と虚部を読むだけで方程式が出る。(1) は $R > 1$ なので楕円の縦半径が 0 にならない。(2) では双曲線全体を書くだけでは不十分で, $r + 1/r \geq 2$ から $x \geq 2 \cos \alpha$ を付けて右枝に限る必要がある。逆にその枝の各点に対応する $r > 0$ が存在することにも触れておく軌跡の答案として完結する。

【第 2 問】

四面体 $OABC$ を考える。点 D, E, F, G, H, I は、それぞれ辺

$$OA, AB, BC, CO, OB, AC$$

上にあり、頂点ではないとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば

$$AE : EB = CF : FB$$

であることを示せ。

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき、これらの点は $OABC$ の各辺の中点であり、 $OABC$ は正四面体であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を基底として、各点を辺上の内分比で表す。 $\overrightarrow{DG}$ には $\overrightarrow{OB}$ 成分がないため、 $\overrightarrow{EF}$ が平行なら $\overrightarrow{OB}$ 成分が 0 になり、内分比の等式が得られる。(2) では、この配置で正八面体になるときの向かい合う頂点が $(D, F), (E, G), (H, I)$ であり、正八面体の 3 本の対角線は共通の中点をもつことを用いる。係数比較で 6 点が各辺の中点であることを示し、その後、正八面体の辺が四面体各面の中点連結線であることから四面体の 6 辺が等しいことを示す。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$$

とおく。点 E は辺 AB 上、点 F は辺 BC 上にあるので、 $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を用いて

$$\overrightarrow{OE} = (1-s)\mathbf{a} + s\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OF} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$$

と書ける。このとき $AE : EB = s : (1-s), CF : FB = (1-t) : t$ である。

また D は OA 上、 G は CO 上にあるから、 $\overrightarrow{DG}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ の 1 次結合で表され、 $\mathbf{b}$ 成分をもたない。一方

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = -(1-s)\mathbf{a} + (1-s-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$$

である。 $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行なら、 $\overrightarrow{EF}$ も $\mathbf{b}$ 成分をもたない。したがって $1-s-t=0$ であり、 $s=1-t$ である。よって $AE : EB = s : (1-s) = (1-t) : t = CF : FB$ となる。

(2) 正八面体では、向かい合う頂点を結ぶ 3 本の対角線が 1 点で交わり、その点で互いに中点に分けられる。この配置では向かい合う頂点は $(D, F), (E, G), (H, I)$ である。したがって $\frac{D+F}{2} = \frac{E+G}{2} = \frac{H+I}{2}$ が成り立つ。以下、位置ベクトルで係数比較を行う。 $0 < \lambda, \mu, \nu, \rho, \eta, \kappa < 1$ を用いて

$$D = \lambda\mathbf{a}, \quad E = (1-\mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \quad F = (1-\nu)\mathbf{b} + \nu\mathbf{c},$$

$$G = \rho \mathbf{c}, \quad H = \eta \mathbf{b}, \quad I = (1 - \kappa) \mathbf{a} + \kappa \mathbf{c}$$

と書く。まず $D + F = E + G$ から係数を比較すると $\lambda = 1 - \mu$, $1 - \nu = \mu$, $\nu = \rho$ である。したがって $\nu = \lambda$, $\rho = \lambda$, $\mu = 1 - \lambda$ である。

次に $E + G = H + I$ から係数を比較すると $1 - \mu = 1 - \kappa$, $\mu = \eta$, $\rho = \kappa$ である。上で得た関係を代入すると $\kappa = \mu = 1 - \lambda$, $\rho = \lambda$ であり、さらに $\rho = \kappa$ より $\lambda = 1 - \lambda$ を得る。よって $\lambda = \frac{1}{2}$ である。これにより $\lambda = \mu = \nu = \rho = \eta = \kappa = \frac{1}{2}$ も従う。したがって D, E, F, G, H, I はすべて、対応する辺の中点である。

最後に、 $OABC$ が正四面体であることを示す。たとえば面 OAB では、 D, E, H はそれぞれ OA, AB, OB の中点である。よって $DE = \frac{1}{2}OB$, $EH = \frac{1}{2}OA$, $HD = \frac{1}{2}AB$ である。正八面体の面 DEH は正三角形なので $DE = EH = HD$ であり、したがって $OA = OB = AB$ である。同様に他の面についても考えると、四面体 $OABC$ の各面は正三角形であり、結局 6 本の辺はすべて等しい。よって $OABC$ は正四面体である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は 2 本の線分が属する面に着目する。 DG は面 OAC 、 EF は面 ABC にあり、平行なら共通方向は 2 平面の交線 AC と平行になる。三角形 ABC の平行線の比で結論する。(2) は正八面体の向かい合う 3 組が共通中点をもつことを、辺上の 6 個の内分係数へ一度に反映する。

【解答】

(1) 線分 DG は平面 OAC 内にあり、線分 EF は平面 ABC 内にある。両者が平行なら、その共通の方向は 2 平面の方向にともに含まれる。平面 OAC と平面 ABC の交線は AC だから

$$EF \parallel AC.$$

したがって三角形 ABC の平行線の性質により

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}.$$

この共通の比を t とすると

$$\frac{AE}{EB} = \frac{1-t}{t} = \frac{CF}{FB}.$$

よって

$$AE : EB = CF : FB.$$

(2)

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$$

とする。6 点を

$$\begin{aligned} D &= d\mathbf{a}, & E &= (1-e)\mathbf{a} + e\mathbf{b}, \\ F &= (1-f)\mathbf{b} + f\mathbf{c}, & G &= g\mathbf{c}, \\ H &= h\mathbf{b}, & I &= (1-i)\mathbf{a} + i\mathbf{c} \end{aligned}$$

と表す。各係数は 0 と 1 の間にある。

正八面体で向かい合う頂点の組は

$$(D, F), \quad (E, G), \quad (H, I)$$

であり、3 本の対角線は共通の中点をもつ。したがって

$$D + F = E + G = H + I.$$

最初の等式を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の係数で比較すると

$$d = 1 - e, \quad f = 1 - e, \quad g = f.$$

次の等式から

$$i = e, \quad h = e, \quad g = i.$$

ゆえに

$$e = g = f = 1 - e,$$

したがって $e = 1/2$ 。すべての係数が $1/2$ となり、6 点は各辺の中点である。

面 OAB では D, E, H が 3 辺の中点なので

$$DE = \frac{1}{2}OB, \quad EH = \frac{1}{2}OA, \quad HD = \frac{1}{2}AB.$$

一方、 DEH は正八面体の正三角形の面である。よって

$$OA = OB = AB.$$

他の面にも同じ議論を適用すると、四面体の 6 辺はすべて等しい。したがって $OABC$ は正四面体である。

【総評】 難度 8, 計算量 7。目安時間は 35 分。(1) は係数比較の標準問題だが, (2) は正八面体の対角線が共通中点をもつ性質を, 四面体の 6 辺上の内分比へ戻す論証が必要である。抽象的な用語に頼らず, 位置ベクトルで各点を表し, 共通中点の等式を係数比較すれば, 中点性が機械的に出る。最後は中点連結線の長さが元の辺の半分であることを使い, 正八面体の面が正三角形であることから四面体の各辺が等しいと結論づける。

【第 3 問】

p, q を自然数、 α, β を

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする。このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

文系第 4 問と同じく, $q = 1$ を先に除外し, $q > 1$ では倍角公式と加法定理から $p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)}$ を得る。あとは自然数 p になる q を調べる。 $q = 2, 3, 4, 5, 6$ を直接確認し, $q \geq 7$ では分子が分母より小さくなることから $0 < p < 1$ として否定する。

【解答】

$q = 1$ のとき, $\tan \beta = 1$ であるから 2β は $\pi/2$ と同じ向きである。したがって $\tan(\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -p$ となり, 2 にはならない。よって $q = 1$ は不適である。

以下, $q > 1$ とする。倍角公式より $\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2q}{q^2 - 1}$ である。よって加法定理から

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2 - 1}}{1 - \frac{2q}{p(q^2 - 1)}}$$

である。これが 2 であるから $\frac{\frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2 - 1}}{1 - \frac{2q}{p(q^2 - 1)}} = 2$ である。整理すると $q^2 - 1 + 2pq = 2p(q^2 - 1) - 4q$ であり, $2p(q^2 - q - 1) = q^2 + 4q - 1$ を得る。したがって $p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)}$ である。 $q = 2, 3, 4, 5, 6$ を調べると $q = 2: p = \frac{11}{2}, \quad q = 3: p = 2,$

$$q = 4: p = \frac{31}{22}, \quad q = 5: p = \frac{44}{38}, \quad q = 6: p = \frac{59}{58}$$

である。したがってこの範囲で自然数になるのは $q = 3, \quad p = 2$ だけである。

次に $q \geq 7$ とする。このとき $2(q^2 - q - 1) - (q^2 + 4q - 1) = q^2 - 6q - 1 > 0$ であるから $0 < p < 1$ となる。よって自然数 p は存在しない。

以上より, 求める組は $(p, q) = (2, 3)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

加法定理から得た有理式を最大公約数で絞る。 $q > 1$ のとき $2p - 1 = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$ 。 $\gcd(q, q^2 - q - 1) = 1$ なので、自然数解なら $q^2 - q - 1$ は 5 の正の約数に限られる。

【解答】

$q = 1$ では

$$\tan(\alpha + 2\beta) = -p \neq 2$$

なので不適である。

$q > 1$ とする。倍角公式と加法定理を用いて整理すると

$$2p(q^2 - q - 1) = q^2 + 4q - 1.$$

右辺を

$$q^2 + 4q - 1 = (q^2 - q - 1) + 5q$$

と分けると

$$2p - 1 = \frac{5q}{q^2 - q - 1}.$$

p が自然数なら $q^2 - q - 1 \mid 5q$ である。一方

$$\gcd(q, q^2 - q - 1) = \gcd(q, -1) = 1$$

だから

$$q^2 - q - 1 \mid 5.$$

$q > 1$ では左辺が正なので

$$q^2 - q - 1 = 1 \quad \text{または} \quad 5.$$

第 1 の場合は $q = 2$ だが $p = 11/2$ となり不適。第 2 の場合は $q = 3$ で

$$p = 2.$$

したがって求める組は

$$(p, q) = (2, 3)$$

のみである。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 20 分。内容は文系第 4 問の統合版であり、三角関数の条件を整数の有理式へ落とすのが中心である。 $q = 1$ では $\tan 2\beta$ の式をそのまま使えないため、先に例外処理する。 $q = 4, 5, 6$ では $1 < p < 2$, $q \geq 7$ では $0 < p < 1$ という範囲評価で自然数を否定すると、列挙が短くまとまる。

【第 4 問】

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、

$$\angle A = \frac{\pi}{3}$$

であるとする。また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき、 $\angle BPC$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は内心の角公式 $\angle BPC = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ を用いる。必要なら、 BP, CP が角の二等分線であることから三角形 BPC の角の和で導ける。(2) は外接円半径 R と内接円半径 r の公式 $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ を用いる。 $A = \pi/3$, $B + C = 2\pi/3$ と鋭角条件 $\pi/6 < B, C < \pi/2$ から、 $(B - C)/2$ の範囲を決め、 $r = \cos \frac{B - C}{2} - 1/2$ の範囲を出す。

【解答】

(1) 内心 P は角の二等分線の交点であるから $\angle PBC = \frac{B}{2}$, $\angle PCB = \frac{C}{2}$ である。三角形 BPC の内角の和より $\angle BPC = \pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}$ である。ここで $B + C = \pi - A$ だから $\angle BPC = \pi - \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ である。 $A = \pi/3$ より $\angle BPC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ である。

(2) 外接円半径を R , 内接円半径を r とすると $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ である。いま $R = 1$, $A = \pi/3$ なので

$$r = 4 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

である。

積和公式を用いると $2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{B - C}{2} - \cos \frac{B + C}{2}$ である。 $B + C = 2\pi/3$ より $\cos \frac{B + C}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ だから $r = \cos \frac{B - C}{2} - \frac{1}{2}$ である。

三角形は鋭角三角形で、 $A = \pi/3$ である。したがって $0 < B, C < \frac{\pi}{2}$, $B + C = \frac{2\pi}{3}$ であり、これより $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$ である。したがって $\left| \frac{B - C}{2} \right| < \frac{\pi}{6}$ である。 $\cos x$ は $0 \leq x < \pi/6$ で 1 から $\sqrt{3}/2$ に近づく値をとる。 $B = C = \pi/3$ のとき $(B - C)/2 = 0$ であり、これは可能である。よって $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \frac{B - C}{2} \leq 1$ である。したがって $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$ である。下端は、 B または C が $\pi/6$ に近づくときに近づくが、鋭角条件のため等号は取れない。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は角の二等分線から直接求める。(2) は半角の内接円公式を使わず、拡張正弦定理で 3 辺を角表示し、面積 $\Delta = abc/(4R)$ と $r = \Delta/s$ を用いる。 $x = (B - C)/2$ と置くと分子が因数分解でき、 $r = \cos x - \frac{1}{2}$ が得られる。

【解答】

(1) P は内心なので

$$\angle PBC = \frac{B}{2}, \quad \angle PCB = \frac{C}{2}.$$

したがって

$$\angle BPC = \pi - \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。外接円半径が 1 なので、拡張正弦定理より

$$a = 2 \sin A = \sqrt{3}, \quad b = 2 \sin B, \quad c = 2 \sin C.$$

ここで

$$x = \frac{B-C}{2}$$

とおく。 $B+C = 2\pi/3$ だから

$$\begin{aligned} b+c &= 2(\sin B + \sin C) \\ &= 4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \cos x. \end{aligned}$$

よって半周長は

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \cos x \right).$$

三角形の面積を Δ とすると $R=1$ より

$$\Delta = \frac{abc}{4}.$$

また

$$\begin{aligned} bc &= 4 \sin B \sin C \\ &= 2\{\cos(B-C) - \cos(B+C)\} \\ &= 2 \cos 2x + 1 \\ &= (2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{s} = \frac{\sqrt{3}bc/4}{\sqrt{3}(\frac{1}{2} + \cos x)} \\ &= \cos x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

鋭角条件と $B+C = 2\pi/3$ から

$$|x| < \frac{\pi}{6}.$$

$x=0$ は可能だが、 $|x| = \pi/6$ は不可能なので

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq 1.$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leq \frac{1}{2}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 4. 目安時間は 18 分。(1) は内心角の標準公式をそのまま使えるが、二等分線から一行で導いておく と 確 実 で あ る 。 (2) は $r = 4R \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2)$ を 使 う と 短 い 。 鋭 角 条 件 に よ り B, C が と も に $\pi/6$ より 大 き く な る た め , 下 限 は 等 号 な し , 上 限 は 正 三 角 形 の 場 合 に 等 号 あ り と な る 。 開 閉 を 落 と さ な い こ と が 重 要 で あ る 。

【第 5 問】

$a \geq 0$ とする。 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で、曲線

$$y = xe^{-x},$$

直線 $y = ax$ 、直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

このとき、 $S(a)$ の最小値を求めよ。

ここで「囲まれた部分」とは、上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。

▶ 解法 1

【方針】

囲まれた面積は、2 つの関数 xe^{-x} と ax の差の絶対値を $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ で積分したもの、つまり

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} x|e^{-x} - a| dx$$

である。最小値は a が $e^{-\sqrt{2}}$ から 1 の間にあるときに生じるので、交点 $c = -\log a$ を置く。 a を少し動かしたときの面積変化、または $S'(a) = 0$ から、重み x の左右の和が等しくなる条件

$$\int_0^c x dx = \int_c^{\sqrt{2}} x dx$$

を得る。これより $c = 1$ 、 $a = e^{-1}$ を求め、最後に面積を計算する。

【解答】

曲線と直線はともに原点を通る。また $x = \sqrt{2}$ で閉じられるので、面積は

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} x|e^{-x} - a| dx$$

と表せる。

まず最小となる a の位置を考える。 $a \geq 1$ なら $0 < x \leq \sqrt{2}$ で $a \geq e^{-x}$ となり、 a を小さくすると面積は小さくなる。したがって最小は $a \geq 1$ では起こらない。また $0 \leq a \leq e^{-\sqrt{2}}$ なら $e^{-x} \geq a$ が区間全体で成り立ち、 a を大きくすると面積は小さくなる。したがって最小は $e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ で起こる。

この範囲では、交点を $c = -\log a$ とおくと $0 < c < \sqrt{2}$ 、 $a = e^{-c}$ である。 $0 \leq x < c$ では $e^{-x} > a$ 、 $c < x \leq \sqrt{2}$ では $e^{-x} < a$ だから

$$S(a) = \int_0^c x(e^{-x} - a) dx + \int_c^{\sqrt{2}} x(a - e^{-x}) dx$$

である。 a で微分すると、交点での境界項は差が 0 なので消え、

$$S'(a) = -\int_0^c x dx + \int_c^{\sqrt{2}} x dx$$

である。最小となるときは $S'(a) = 0$ であるから

$$\int_0^c x dx = \int_c^{\sqrt{2}} x dx$$

である。したがって $\frac{c^2}{2} = \frac{2 - c^2}{2}$ より $c = 1$ である。よって $a = e^{-1}$ で最小となる。

このとき

$$S_{\min} = \int_0^1 x(e^{-x} - e^{-1}) dx + \int_1^{\sqrt{2}} x(e^{-1} - e^{-x}) dx$$

である。部分積分により

$$\int xe^{-x} dx = -(x+1)e^{-x}$$

だから

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

であり,

$$\int_1^{\sqrt{2}} x e^{-x} dx = \frac{2}{e} - (1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$$

である。したがって

$$S_{\min} = \left(1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e}\right) + \left(\frac{1}{2e} - \frac{2}{e} + (1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\right)$$

となり, 整理して $S_{\min} = 1 - \frac{4}{e} + (1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

面積を

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} x |e^{-x} - a| dx$$

とし, a に関する凸関数として扱う。微分は「 a より上にある部分」と「下にある部分」の重みの差になる。零点は重み x を左右に等分する位置 $c = 1$ であり, 凸性から大域的最小と分かる。

【解答】

面積は

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} x |e^{-x} - a| dx$$

である。各 x に対して $|e^{-x} - a|$ は a の凸関数なので, $S(a)$ も凸関数である。したがって, 微分係数が 0 となる点があれば, それが大域的な最小点である。

$e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ とし,

$$c = -\log a$$

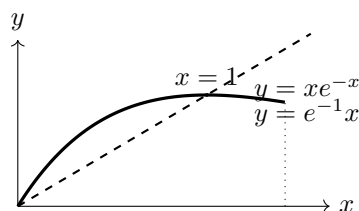
とおく。 $e^{-x} > a$ は $x < c$, $e^{-x} < a$ は $x > c$ と同値である。よって

$$\begin{aligned} S'(a) &= -\int_0^c x dx + \int_c^{\sqrt{2}} x dx \\ &= -\frac{c^2}{2} + \frac{2 - c^2}{2} \\ &= 1 - c^2. \end{aligned}$$

したがって $S'(a) = 0$ は $c = 1$, すなわち

$$a = e^{-1}.$$

凸性より, ここで最小となる。



最小値は

$$\begin{aligned} S_{\min} &= \int_0^1 x(e^{-x} - e^{-1}) dx + \int_1^{\sqrt{2}} x(e^{-1} - e^{-x}) dx. \\ \int x e^{-x} dx &= -(x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

を用いて計算すると

$$S_{\min} = 1 - \frac{4}{e} + (1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}.$$

【総評】 難度 7, 計算量 6。目安時間は 27 分。面積を $x|e^{-x} - a|$ の積分と見抜くことが第一段階である。最小化では、交点の左右で符号が変わるため、境界の移動を含む微分を雑に扱っていると誤りやすい。交点では 2 曲線が一致するので境界項が消えること、左右の x の重みがつり合う条件から $c = 1$ が出ることを明記したい。端の範囲 $a \leq e^{-\sqrt{2}}$, $a \geq 1$ で最小が起らない確認も重要である。

【第 6 問】

n を自然数とする。 n 個の箱すべてに、1、2、3、4、5 の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ、計 5 枚入っている。各箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき、 X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

3 で割り切れるかどうかは桁和の 3 で割った余りだけで決まる。各箱から出るカードの余りは、0 が 1 種類、1 が 2 種類、2 が 2 種類である。 n 桁までの桁和の余りが 0 である列数を A_n , 余り 1 と余り 2 である列数を対称性によりともに B_n とおく。 $A_n + 2B_n = 5^n$ と、次の 1 枚を加えたときの $A_{n+1} = A_n + 4B_n$ から漸化式を作り、 A_n を求める。

【解答】

整数が 3 で割り切れるかどうかは、各桁の和が 3 で割り切れるかどうかで決まる。カード 1, 2, 3, 4, 5 を 3 で割った余りで分類すると 0 : 1, 1 : 2, 2 : 2 である。 n 枚取り出して並べたとき、桁和を 3 で割った余りが 0 となる並べ方の数を A_n とする。また、余り 1 となる並べ方の数と余り 2 となる並べ方の数は、余り 1 と余り 2 のカードの種類数がどちらも 2 であることから等しい。これを B_n とおく。すると $A_n + 2B_n = 5^n$ である。

次に 1 枚を追加して、余り 0 になる場合を数える。前の余りが 0 で、余り 0 のカードを加える場合が A_n 通りある。前の余りが 1 で、余り 2 のカードを加える場合は、余り 2 のカードが 2 種類あるので $2B_n$ 通りである。前の余りが 2 で、余り 1 のカードを加える場合も $2B_n$ 通りである。したがって $A_{n+1} = A_n + 4B_n$ である。 $B_n = (5^n - A_n)/2$ を代入すると $A_{n+1} = A_n + 4 \cdot \frac{5^n - A_n}{2} = 2 \cdot 5^n - A_n$ である。初期値は、1 桁で余り 0 となるカードが 3 だけなので $A_1 = 1$ である。

この漸化式を解く。式 $A_{n+1} = 2 \cdot 5^n - A_n$ に対して、 $A_n = \frac{5^n + 2(-1)^n}{3}$ が成り立つことは、 $n = 1$ で正しく、さらに代入により次の項でも成り立つので帰納的に確認できる。

全体の並べ方は 5^n 通りである。したがって求める確率は $\frac{A_n}{5^n} = \frac{5^n + 2(-1)^n}{3 \cdot 5^n}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

1 の 3 乗根 ω を用いる余り抽出で数える。1 箱から選ぶカードの桁和生成式を $F(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$ とすると、 $F(t)^n$ の指数が 3 の倍数である項の係数和は $t = 1, \omega, \omega^2$ の 3 値の平均で得られる。

【解答】

1 の 3 乗根

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

をとる。このとき

$$1 + \omega + \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 1.$$

1 箱から取り出すカードの数字を指数として

$$F(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$$

とおく。 n 箱から選んだ数字の和が k となる列数は、 $F(t)^n$ の t^k の係数である。

指数 k が 3 の倍数なら

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} = 3,$$

そうでなければこの和は 0 である。したがって、桁和が 3 の倍数となる列数 A_n は

$$A_n = \frac{F(1)^n + F(\omega)^n + F(\omega^2)^n}{3}.$$

ここで

$$F(1) = 5.$$

また

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 \\ &= 1 + 2(\omega + \omega^2) = -1, \end{aligned}$$

同様に $F(\omega^2) = -1$ である。よって

$$A_n = \frac{5^n + 2(-1)^n}{3}.$$

全事象は 5^n 通りなので、求める確率は

$$\frac{A_n}{5^n} = \frac{5^n + 2(-1)^n}{3 \cdot 5^n}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 4。目安時間は 18 分。カードを実際の数字ではなく 3 で割った余りに分類するのが要点である。余り 1 と余り 2 のカードがどちらも 2 種類あるため, 余り 1 の列数と余り 2 の列数を同じ B_n として扱える。漸化式 $A_{n+1} = 2 \cdot 5^n - A_n$ まで作れれば, あとは初期値と帰納法で閉じる。確率に戻すとき, 全事象が 5^n 通りであることを忘れない。