

京都大学 2018 年度 文系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a は正の実数とする。座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり、 $|x_0| \neq 1$ を満たすとする。

C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき、 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

絶対値のため、接点の位置が $|x| > 1$ の枝にあるか、 $|x| < 1$ の枝にあるかをまず分ける。外側では C_1 と C_2 の傾きが一致する条件から $a = 0$ となり、 $a > 0$ に反する。内側では $C_1 : y = 1 - x^2$ として、共有点条件と接線の傾き一致を連立し、接点と a を決める。面積は接点からもう一つの交点までだが、途中で $x = 1$ をまたいで C_1 の式が変わるので、積分を 2 つに分ける。

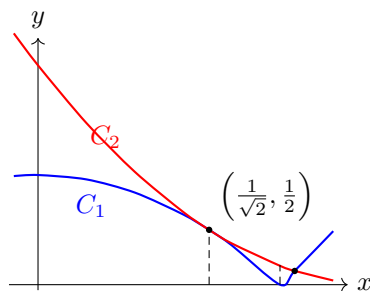
【解答】

$|x| > 1$ では C_1 は $y = x^2 - 1$ であり、その傾きは $2x$ である。一方、 $C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$ の傾きは $2x - 2a$ である。共通接線をもつなら $2x_0 = 2x_0 - 2a$ となり、 $a = 0$ を得る。これは $a > 0$ に反する。したがって接点は外側の枝にはない。

よって接点は $|x_0| < 1$ にある。この範囲では $C_1 : y = 1 - x^2$ であり、その傾きは $-2x$ である。共通接線の条件から $-2x_0 = 2x_0 - 2a$ なので $a = 2x_0$ である。また共有点条件より $1 - x_0^2 = x_0^2 - 2ax_0 + 2$ である。ここに $a = 2x_0$ を代入すると $1 - x_0^2 = 2 - 3x_0^2$ すなわち $2x_0^2 = 1$ である。 $a = 2x_0 > 0$ より $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = \sqrt{2}$ である。

このとき $C_2 : y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ である。

このときの 2 曲線と 2 つの交点の位置関係は次の通りである。



接点のほかの交点を求める。 $|x| < 1$ の枝では接しているだけなので、もう一つの交点は $x > 1$ の枝で生じる。そこで $x^2 - 1 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ を解くと $x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ である。 $1/\sqrt{2} \leq x \leq 1$ では上側が C_2 、下側が $C_1 : y = 1 - x^2$ であり、差は $(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) - (1 - x^2) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ である。 $1 \leq x \leq 3/(2\sqrt{2})$ では下側が $C_1 : y = x^2 - 1$ で、差は $(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) - (x^2 - 1) = 3 - 2\sqrt{2}x$ である。したがって求める面積は

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 (2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) dx + \int_1^{3/(2\sqrt{2})} (3 - 2\sqrt{2}x) dx$$

である。第一項は

$$\left[\frac{2}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x \right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{2}{3} - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

であり、第二項は

$$\left[3x - \sqrt{2}x^2 \right]_1^{3/(2\sqrt{2})} = \frac{9}{4\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$$

である。これらを合わせると $\frac{23\sqrt{2}}{24} - \frac{4}{3}$ となる。

▶ 解法 2

【方針】

接点が外側の枝にないことを傾きから確認した後、内側の枝で 2 曲線の差を 2 次式として見る。接するための判別式が 0 になることから $a = \sqrt{2}$ と接点を一度に決める。面積は差を平方および 1 次式に因数化して、短く積分する。

【解答】

まず $|x_0| > 1$ なら、 C_1 と C_2 の傾きはそれぞれ

$$2x_0, \quad 2x_0 - 2a$$

である。これらが等しいと $a = 0$ となり、条件に反する。したがって

$$|x_0| < 1$$

である。

この範囲では $C_1: y = 1 - x^2$ だから、 C_2 と C_1 の高さの差は

$$(x^2 - 2ax + 2) - (1 - x^2) = 2x^2 - 2ax + 1$$

である。2 曲線が接するためには、この 2 次式が重解をもつ。判別式を 0 とおくと

$$(-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

したがって $a^2 = 2$ である。 $a > 0$ より

$$a = \sqrt{2}, \quad x_0 = \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

内側の枝での差は

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

外側の枝とのもう 1 つの交点は

$$x^2 - 1 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$$

より

$$x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

であり、外側での高さの差は

$$3 - 2\sqrt{2}x = 2\sqrt{2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - x\right).$$

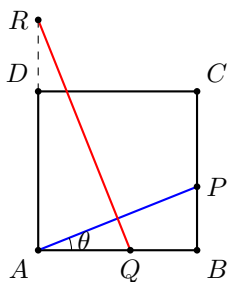
よって面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx + \int_1^{3/(2\sqrt{2})} 2\sqrt{2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - x\right) dx \\ &= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \sqrt{2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - 1\right)^2 \\ &= \frac{23\sqrt{2}}{24} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。絶対値の外側の枝では傾き一致が $a = 0$ を強制するため、接点は内側に限られる。内側では共有点条件と傾き条件を連立しても、2 曲線の差の判別式を 0 としても $a = \sqrt{2}$, $x_0 = 1/\sqrt{2}$ が得られる。面積区間の途中に $x = 1$ があり、 C_1 の式が $1 - x^2$ から $x^2 - 1$ へ変わるため、積分を必ず 2 つに分ける。図で接点と第 2 交点の順序を確認し、両解法の結果が一致することまで検算した。

【第 2 問】

1 辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ において、辺 BC 上に B とは異なる点 P を取る。線分 AP の垂直二等分線が、辺 AB 、辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q, R とする。



(1) 線分 QR の長さを $\sin \angle BAP$ を用いて表せ。

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正方形を座標平面に置き、 $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $D = (0, 1)$, $P = (1, t)$ とする。線分 AP の垂直二等分線は、中点 $(1/2, t/2)$ を通り、傾き $-1/t$ の直線である。これと AB , AD との交点 Q, R を求め、 QR を t で表す。さらに $s = \sin \angle BAP = t/\sqrt{1+t^2}$ に置き換える。(2) は $t^2 = u$ として QR^2 の最小化に直す。

【解答】

(1) 座標を $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $D = (0, 1)$ とし、 P を $P = (1, t)$ ($0 < t \leq 1$) とおく。線分 AP の傾きは t であり、中点は $(\frac{1}{2}, \frac{t}{2})$ である。したがって垂直二等分線は $y - \frac{t}{2} = -\frac{1}{t} \left(x - \frac{1}{2} \right)$ で表される。

この直線と AB , すなわち $y = 0$ との交点を Q とすると $-\frac{t}{2} = -\frac{1}{t} \left(x - \frac{1}{2} \right)$ より $Q = \left(\frac{1+t^2}{2}, 0 \right)$ である。また AD またはその延長, すなわち $x = 0$ との交点を R とすると $y - \frac{t}{2} = \frac{1}{2t}$ なので $R = \left(0, \frac{1+t^2}{2t} \right)$ である。

よって

$$QR = \sqrt{\left(\frac{1+t^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+t^2}{2t} \right)^2} = \frac{(1+t^2)^{3/2}}{2t}$$

である。

ここで $s = \sin \angle BAP$ とおく。直角三角形で $s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ だから $1-s^2 = \frac{1}{1+t^2}$ である。したがって $s(1-s^2) = \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$ であり、 $QR = \frac{1}{2s(1-s^2)}$ である。

(2) (1) の式から $QR^2 = \frac{(1+t^2)^3}{4t^2}$ である。 $u = t^2$ とおくと $0 < u \leq 1$ であり、 $QR^2 = \frac{(1+u)^3}{4u}$ である。これを $F(u)$ とおくと $F'(u) = \frac{(1+u)^2(2u-1)}{4u^2}$ である。よって $F(u)$ は $0 < u < 1/2$ で減少し、 $1/2 < u \leq 1$ で増加する。したがって最小は $u = \frac{1}{2}$ で起こる。

このとき $QR^2 = \frac{(3/2)^3}{4 \cdot (1/2)} = \frac{27}{16}$ なので、求める最小値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

$\theta = \angle BAP$, $s = \sin \theta$ とおく。 Q, R は AP の垂直二等分線上にあるので $QA = QP$, $RA = RP$ である。 2 つの二等辺三角形から AQ, AR を $s, \cos \theta$ で表し, 直角三角形 AQR に三平方の定理を使う。 最小化には相加相乗平均を用い, 微分を使わずに等号条件まで決める。

【解答】

(1)

$$\theta = \angle BAP, \quad s = \sin \theta$$

とおく。 P は辺 BC 上にあるから

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Q は AP の垂直二等分線上にあるので $QA = QP$ である。 二等辺三角形 AQP に余弦定理を用いると

$$QP^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos \theta.$$

左辺は AQ^2 だから

$$AQ = \frac{AP}{2 \cos \theta}.$$

また $AB = 1$ より $AP \cos \theta = 1$ なので

$$AQ = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}.$$

同様に $RA = RP$ であり,

$$\angle RAP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

だから

$$AR = \frac{AP}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta}.$$

$AQ \perp AR$ より

$$\begin{aligned} QR^2 &= AQ^2 + AR^2 \\ &= \frac{1}{4 \cos^4 \theta} + \frac{1}{4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta}. \end{aligned}$$

したがって $\cos^2 \theta = 1 - s^2$ を用いると

$$QR = \frac{1}{2s(1-s^2)}.$$

(2)

$x = s^2$ とおくと $0 < x \leq 1/2$ である。 正の 3 数

$$x, \quad \frac{1-x}{2}, \quad \frac{1-x}{2}$$

の和は 1 なので, 相加相乗平均より

$$\frac{x(1-x)^2}{4} \leq \frac{1}{27}.$$

よって

$$s(1-s^2) = \sqrt{x(1-x)^2} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

等号は

$$x = \frac{1-x}{2},$$

すなわち $x = 1/3$ のときに成り立ち, これは $0 < x \leq 1/2$ に含まれる。 したがって

$$QR \geq \frac{1}{2 \cdot 2/(3\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

ゆえに最小値は

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 20 分。座標法では垂直二等分線の 2 つの切片を求めればよく、図形法では $QA = QP$, $RA = RP$ を使うと短く処理できる。いずれも $s = \sin \angle BAP$ とおけば

$$QR = \frac{1}{2s(1-s^2)}$$

となる。最小化は微分でも相加相乗平均でも可能で、等号条件は $s^2 = 1/3$ 。点 R が辺 AD の延長上に出る場合を含むため、図と符号を先に確認しておく安全である。

【第 3 問】

整数 n に対し、

$$n^3 - 7n + 9$$

が素数となるような n をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

整数 n について $n^3 \equiv n \pmod{3}$ が成り立つことを使い、 $n^3 - 7n + 9$ が常に 3 で割り切れることを示す。素数は正の約数を 1 と自分自身しかもたない正の整数なので、3 で割り切れる素数なら値は 3 に限られる。あとは $n^3 - 7n + 9 = 3$ を因数分解して整数解を求め、実際に値が 3 になることを確認する。

【解答】

任意の整数 n について $n^3 \equiv n \pmod{3}$ である。したがって $n^3 - 7n + 9 \equiv n - n + 0 \equiv 0 \pmod{3}$ であり、 $n^3 - 7n + 9$ は常に 3 で割り切れる。

この値が素数であるとする。素数は正の整数であり、しかも 3 で割り切れるので、その値は 3 でなければならない。よって $n^3 - 7n + 9 = 3$ を解けばよい。これは $n^3 - 7n + 6 = 0$ すなわち $(n-1)(n-2)(n+3) = 0$ である。したがって $n = -3, 1, 2$ を得る。

実際、これらの値では $n^3 - 7n + 9 = 3$ となるので素数である。以上より、求める整数は $-3, 1, 2$ である。

▶ 解法 2

【方針】

式を $3 + (n-1)(n-2)(n+3)$ と変形する。3 つの因子 $n-2, n-1, n+3$ は 3 で割った余りが互いに異なるので、その積は必ず 3 の倍数である。したがって元の式も 3 の倍数であり、素数になるには 3 に等しいことが必要である。

【解答】

恒等式

$$n^3 - 7n + 9 = 3 + (n-1)(n-2)(n+3)$$

を用いる。

3 整数 $n-2, n-1, n+3$ を 3 で割った余りは、順序を除けば $0, 1, 2$ である。したがって

$$3 \mid (n-1)(n-2)(n+3)$$

であり、 $n^3 - 7n + 9$ も 3 の倍数である。

この値が素数なら、正の素数で 3 の倍数であるから

$$n^3 - 7n + 9 = 3$$

でなければならない。よって

$$(n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

となり、

$$n = -3, 1, 2$$

を得る。いずれを代入しても元の式の値は 3 であるため、これらはすべて条件を満たす。

【総評】 難度 4、目安時間 10 分。式が常に 3 の倍数であることを見抜く整数問題である。合同式 $n^3 \equiv n \pmod{3}$ を使う方法と、 $3 + (n-1)(n-2)(n+3)$ へ変形する方法の双方で検算できる。「3 で割り切れる」だけで終えず、素数を正の整数として扱って値が 3 に限られること、さらに $n = -3, 1, 2$ を代入して実現を確認することまで書く。

【第 4 問】

四面体 $ABCD$ は

$$AC = BD, \quad AD = BC$$

を満たすとし、辺 AB の中点を P 、辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 $ABCD$ を切って 2 つの部分に分ける。このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

中点 P を原点に取り、 A, B を反対向きのベクトル $\vec{a}, -\vec{a}$ で表す。同様に Q の位置を $\vec{q}$ とし、 C, D を $\vec{q} + \vec{c}, \vec{q} - \vec{c}$ と表す。辺長条件 $AC = BD, AD = BC$ を 2 乗して展開すると、 $\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0, \vec{q} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$ が得られ、ここから $\vec{q} \cdot \vec{a} = 0$ を導く。(2) は同時に $\vec{q} \cdot \vec{c} = 0$ も出ることを用い、 PQ を軸とする 180 度回転が $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$ を入れ替える対称性で体積を二等分する。

【解答】

(1) 点 P を原点とする。 P は AB の中点なので、あるベクトル $\vec{a}$ を用いて $A = \vec{a}, B = -\vec{a}$ と表せる。また Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とし、 Q が CD の中点であることから、あるベクトル $\vec{c}$ を用いて $C = \vec{q} + \vec{c}, D = \vec{q} - \vec{c}$ と表す。

条件 $AC = BD$ より $|\vec{q} + \vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{q} - \vec{c} + \vec{a}|^2$ である。右辺は $|\vec{q} - (\vec{c} - \vec{a})|^2$ であるから、差を取ると $4\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$ すなわち $\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$ である。

同様に $AD = BC$ より $|\vec{q} - \vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{q} + \vec{c} + \vec{a}|^2$ であり、これは $\vec{q} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$ を与える。2 つの式を引くと $\vec{q} \cdot \vec{a} = 0$ である。

ここで $\overrightarrow{PQ} = \vec{q}, \overrightarrow{AB} = B - A = -2\vec{a}$ である。したがって $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ となり、辺 AB と線分 PQ は垂直である。

(2) 上で得た 2 つの式 $\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0, \vec{q} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$ を足すと $\vec{q} \cdot \vec{c} = 0$ である。よって PQ は AB だけでなく CD にも垂直である。

直線 PQ を軸として空間を 180 度回転させることを考える。この回転では $\vec{q}$ の方向はそのまま保たれ、 $\vec{q}$ に垂直な成分は符号が反対になる。いま $\vec{a}$ も $\vec{c}$ も $\vec{q}$ に垂直であるから、この回転によって

$$\vec{a} \leftrightarrow -\vec{a}, \quad \vec{q} + \vec{c} \leftrightarrow \vec{q} - \vec{c}$$

となる。すなわち $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$ である。

平面 α は軸 PQ を含むので、この 180 度回転で平面 α は自分自身に移る。また、この回転は平面 α の両側を入れ替える。したがって、平面 α によって分けられた四面体の 2 つの部分は、この回転により互いに移り合う。回転は体積を保つので、2 つの部分の体積は等しい。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は P を原点として中点ベクトルを置き、2つの辺長条件の差から $PQ \perp AB$ と $PQ \perp CD$ を得る。(2) では PQ を z 軸、切断平面 α を xz 平面に選ぶ。4 頂点の座標が z 軸まわりの 180 度回転で 2 組に交換されることを座標で示し、平面の両側の体積が等しいと結論する。

【解答】

(1)

P を原点とし、

$$A = \mathbf{a}, \quad B = -\mathbf{a}, \quad Q = \mathbf{q}, \quad C = \mathbf{q} + \mathbf{c}, \quad D = \mathbf{q} - \mathbf{c}$$

と表す。

$AC = BD$ の両辺を 2 乗して差を取ると

$$4\mathbf{q} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

同様に $AD = BC$ から

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 0$$

を得る。2 式の差と和を取れば

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{a}$ だから

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

したがって $AB \perp PQ$ である。

(2)

PQ を z 軸とし、 PQ を含む平面 α を xz 平面とるように直交座標を取る。 $P = (0, 0, 0)$, $Q = (0, 0, h)$ と書く。

上で $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ はともに $\mathbf{q}$ と垂直であることを示した。よって適当な実数 u, v, r, s により

$$\begin{aligned} A &= (u, v, 0), & B &= (-u, -v, 0), \\ C &= (r, s, h), & D &= (-r, -s, h) \end{aligned}$$

と表せる。

z 軸まわりに 180 度回転する写像は

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$$

である。この回転により

$$A \longleftrightarrow B, \quad C \longleftrightarrow D$$

となるから、四面体 $ABCD$ は自分自身に移る。一方、切断平面 α は $y = 0$ であり回転後も不変だが、 $y > 0$ の側と $y < 0$ の側は交換される。

したがって、平面 α で切られた 2 つの部分はこの回転で互いに移り合う。回転は体積を保つので、2 つの部分の体積は等しい。

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。(1) は辺長条件を 2 乗して差を取り、中点ベクトルとの内積だけを残す。2 式の差と和から $PQ \perp AB$ と $PQ \perp CD$ が同時に得られる。(2) は PQ を軸とする 180 度回転が $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$ を引き起こすことを、ベクトルでも直交座標でも示せる。切断平面が不変であること、その両側が交換されること、回転が体積を保存することの 3 点を明記する。

【第 5 問】

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対し、次の一連の操作を考える。ただし、各球に書かれている整数は 1 つだけとする。

- (i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し、その球に書かれている整数を k とする。
- (ii) $k \neq 0$ の場合、整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。
- (iii) $k = 0$ の場合、袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

整数 0 が書かれている球が 1 個だけ入った袋から始める。この袋に上の操作を n 回繰り返した後、袋の中にある $n+1$ 個の球に書かれた数の合計を X_n とする。例えば X_1 は常に 1 である。以下、 $n \geq 2$ とする。

(1)

$$X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

である確率を求めよ。

(2) $X_n \leq n+1$ である確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

操作後の和は、0 を取り出すと新しい最大値が 1 つ増え、正の数を取り出すとその数が増える 1 つ増えると考えて。 (1) のしきい値は最大和 $1+2+\cdots+n$ より 1 だけ小さいので、最大または最大より 1 小さい操作列だけを数えればよい。 (2) では各回で少なくとも 1 ずつ和が増えるため $X_n \geq n$ であり、 $X_n = n$ と $X_n = n+1$ になる極端な列を直接数える。確率は、各時刻の袋の中の球数と、該当する数が書かれた球の個数を追って掛け合わせる。

【解答】

(1) 和を最大にするには、毎回 0 が書かれた球を取り出せばよい。このとき 1 回ごとに新しい数が作られ、 n 回後の正の数は $1, 2, \dots, n$ である。したがって最大値は $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ である。問題の条件は $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ であり、最大値より 1 小さい値以上を求めている。

最大値になるのは、 n 回すべてで 0 を取り出す場合だけである。この確率は、 j 回目の操作直前に袋の中の球が j 個あることから $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$ である。

次に最大値より 1 小さい値になる場合を考える。最初の $n-1$ 回で 0 を取り出すと、袋には 0 と $1, 2, \dots, n-1$ が 1 個ずつ入っている。最後に 0 ではなく $n-1$ と書かれた球を取り出せば、増える値が n ではなく $n-1$ になるので、和は最大値より 1 だけ小さくなる。これ以外で 0 を取り出さない回がもっと早いと、失う値は 2 以上になるため条件を満たさない。

この場合の確率は $1 \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$ である。よって求める確率は $\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{2}{n!}$ である。

(2) 各操作では新たに入る球の数は少なくとも 1 であるから、常に $X_n \geq n$ である。したがって $X_n \leq n+1$ となるのは、 $X_n = n$ または $X_n = n+1$ の場合に限られる。

まず $X_n = n$ となるには、1 回目に 0 を取り出して 1 を作り、その後は毎回 1 と書かれた球を取り出すしかない。2 回目以降、 j 回目の操作直前には袋の中の球が j 個あり、そのうち 1 と書かれた球が $j-1$ 個ある。よって確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ である。

次に $X_n = n+1$ となる場合を数える。これは、2 回目から n 回目までのどこか 1 回だけ 0 を取り出して 2 を作り、それ以外の回では 1 を取り出す場合に限られる。0 を取り出すのが m 回目 ($2 \leq m \leq n$) であるとする。その前までは 1 を取り出し、 m 回目に 0 を取り出し、その後は再び 1 を取り出すので、その確率は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{m-2}{m-1} \right) \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{m}{m+2} \cdots \frac{n-2}{n} \right) = \frac{1}{n(n-1)}$$

である。この値は m によらない。 m は $n-1$ 通りあるから $P(X_n = n+1) = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$ である。

以上より $P(X_n \leq n+1) = P(X_n = n) + P(X_n = n+1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

各回に新しく加わる数を、最大列 $1, 2, \dots, n$ からの「不足」と、最小列 $1, 1, \dots, 1$ からの「超過」で評価する。(1) では不足が高々 1, (2) では超過が高々 1 となる操作列を分類する。分類後の確率は、その時点の球総数と 1 が書かれた球の個数から積を作り、望ましい形に約分する。

【解答】

(1)

毎回 0 を取り出すと、新しく加わる数は順に

$$1, 2, \dots, n$$

となる。したがって

$$X_n \leq 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

問題のしきい値はこの最大値より 1 だけ小さい。

最初に 0 以外を取り出すのが第 m 回だとする。それ以前は 0 を取り出しているので、第 m 回直前の正の数は $1, 2, \dots, m-1$ である。ここで $k \leq m-1$ を取り出すと、本来加わる m の代わりに k が加わり、少なくとも 1 不足する。

もし $m < n$ なら、次回以降も最大値の生成が 1 段遅れるため、最終的な不足は少なくとも 2 になる。よって不足が高々 1 となるのは、次の 2 場合だけである。

場合	操作列	X_n
最大	0 を n 回連続で取り出す	$\frac{n(n+1)}{2}$
最大より 1 小さい	0 を $n-1$ 回取り出し、最後に $n-1$ を取り出す	$\frac{n(n+1)}{2} - 1$

どちらの確率も

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

である。したがって求める確率は

$$\frac{2}{n!}.$$

(2)

最小の増分は毎回 1 なので $X_n \geq n$ である。 $X_n = n$ となるには、最初に 0 を取り出して 1 を作り、以後は 1 だけを取り出せばよい。その確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

$X_n = n+1$ となるには、基準の増分 1 を超える操作がちょうど 1 回だけ必要である。それは第 m 回 ($2 \leq m \leq n$) に 0 を取り出して 2 を作り、他の回では 1 を取り出す場合に限られる。

第 m 回より前、第 m 回、第 m 回より後の確率を分けると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{m-2}{m-1} \right) \frac{1}{m} \left(\frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{m}{m+2} \cdots \frac{n-2}{n} \right) \\ &= \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

これは m によらず、 m は $n-1$ 通りあるから

$$P(X_n = n+1) = \frac{1}{n}.$$

ゆえに

$$P(X_n \leq n+1) = P(X_n = n) + P(X_n = n+1) = \frac{2}{n}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。分布全体を求めず、最大値からの不足と最小値からの超過だけを分類するのが核心である。(1) のしきい値は最大値 $n(n+1)/2$ より 1 小さいため、許されるのは全回 0、または最後だけ $n-1$ の 2 列。(2) は $X_n \geq n$ から $n, n+1$ の場合だけを数える。0 を取り出す時刻 m を固定した後半では、1 の球の個数が球総数より 2 少ないことに注意して積を作る。2 解法で確率 $2/n!$ と $2/n$ を相互検算した。