

入 学 試 験 問 題



数 学

京 都 大 学 2018 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

0 でない実数 a, b, c は、次の条件を満たしながら動くものとする。

(i)

$$1 + c^2 \leq 2a.$$

(ii) 2つの放物線

$$C_1: y = ax^2, \quad C_2: y = b(x-1)^2 + c$$

は接している。

ただし、2つの曲線が接するとは、ある共有点で共通の接線をもつことをいい、その共有点を接点という。

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a, c を用いて表せ。

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め、その範囲を図示せよ。

第 2 問

整数 n に対し,

$$n^3 - 7n + 9$$

が素数となるような n をすべて求めよ。

第 3 問

α は

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

を満たす定数とし，四角形 $ABCD$ に関する次の 2 条件を考える。

(i) 四角形 $ABCD$ は半径 1 の円に内接する。

(ii)

$$\angle ABC = \angle DAB = \alpha.$$

条件 (i)，(ii) を満たす四角形のうち，4 辺の長さの積

$$k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

が最大となるものについて， k の値を求めよ。

第 4 問

コインを n 回投げ、複素数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ を次のように定める。

(i) 1 回目に表が出れば

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

とし、裏が出れば $z_1 = 1$ とする。

(ii) $k = 2, 3, \dots, n$ のとき、 k 回目に表が出れば

$$z_k = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$$

とし、裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする。ただし、 $\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である。

このとき、 $z_n = 1$ となる確率を求めよ。

第 5 問

曲線 $y = \log x$ 上の点 $A(t, \log t)$ における法線上に、点 B を $AB = 1$ となるように取る。ただし、 B の x 座標は t より大きいとする。

(1) 点 B の座標 $(u(t), v(t))$ を求めよ。また、

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right)$$

を求めよ。

(2) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとする。 t が r から 1 まで動くとき、点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r), L_2(r)$ とする。このとき、

$$\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r))$$

を求めよ。

第 6 問

四面体 $ABCD$ は

$$AC = BD, \quad AD = BC$$

を満たすとし、辺 AB の中点を P 、辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 $ABCD$ を切って2つの部分に分ける。このとき、2つの部分の体積は等しいことを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)