

## 京都大学 2018 年度 理系

## 解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

## 【第 1 問】

0 でない実数  $a, b, c$  は、次の条件を満たしながら動くものとする。

(i)

$$1 + c^2 \leq 2a.$$

(ii) 2 つの放物線

$$C_1: y = ax^2, \quad C_2: y = b(x-1)^2 + c$$

は接している。

ただし、2 つの曲線が接するとは、ある共有点で共通の接線をもつことをいい、その共有点を接点という。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  の接点の座標を  $a, c$  を用いて表せ。

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の接点が動く範囲を求め、その範囲を図示せよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

接点の  $x$  座標を  $t$  とおき、共有点条件と接線の傾き一致を連立する。傾き一致から  $b(t-1) = at$  を得て、共有点条件へ代入すると  $c = at$ ，すなわち接点が  $(c/a, c^2/a)$  と表せる。(2) では接点を  $(X, Y)$  として  $a = Y/X^2$ ， $c = Y/X$  に戻し、条件  $1 + c^2 \leq 2a$  を円板  $X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$  に変換する。最後に  $c \neq 0$  と  $t \neq 1$  から除外される点を確認し、逆にその範囲の点から  $a, b, c$  が作れることも示す。

## 【解答】

(1) 接点の  $x$  座標を  $t$  とする。 $C_1: y = ax^2$  の接線の傾きは  $2at$  であり、 $C_2: y = b(x-1)^2 + c$  の接線の傾きは  $2b(t-1)$  である。したがって  $2at = 2b(t-1)$  であり、 $b(t-1) = at$  を得る。また共有点条件より  $at^2 = b(t-1)^2 + c$  である。ここに  $b(t-1) = at$  を用いると  $at^2 = at(t-1) + c$  となるから  $c = at$  である。よって  $t = \frac{c}{a}$  であり、接点の座標は  $\left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a}\right)$  である。

なお、 $a \neq 0$ ， $c \neq 0$  なので  $t \neq 0$  である。また  $t = 1$  なら傾き一致式から  $a = 0$  となるため、実際には  $t \neq 1$  でもある。

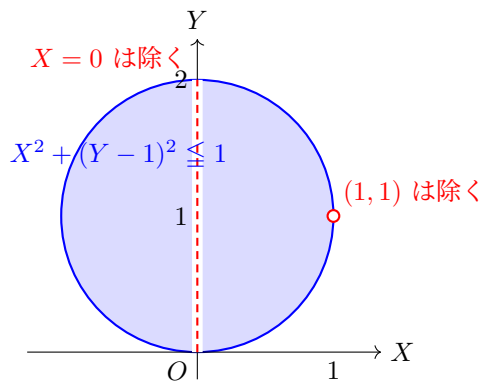
(2) 接点を  $(X, Y)$  とおく。(1) より  $X = \frac{c}{a}$ ， $Y = \frac{c^2}{a}$  である。 $c \neq 0$  より  $X \neq 0$  であり、このとき  $a = \frac{Y}{X^2}$ ， $c = \frac{Y}{X}$  である。条件 (i) は  $1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 \leq 2 \cdot \frac{Y}{X^2}$  となる。両辺に  $X^2 > 0$  を掛けて整理すると  $X^2 + Y^2 \leq 2Y$  すなわち  $X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$  である。

さらに  $t = 1$  は許されない。 $t = X$  なので、 $X = 1$  を除く必要がある。ただし上の円板上で  $X = 1$  を満たす点は  $(1, 1)$  だけである。したがって候補は  $X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$ ， $X \neq 0$ ， $(X, Y) \neq (1, 1)$  である。

逆に、この条件を満たす点  $(X, Y)$  を任意に取る。円板条件と  $X \neq 0$  から  $Y > 0$  である。そこで  $a = \frac{Y}{X^2}$ ， $c = \frac{Y}{X}$ ， $b = \frac{ac}{c-a}$  と定める。 $X \neq 1$  なので  $c - a \neq 0$  であり、 $a, b, c$  はいずれも 0 でない。このとき  $1 + c^2 \leq 2a$  は円板条件そのものであり、 $t = X$  で 2 つの放物線は接する。よって上の候補はすべて実現する。

したがって接点の動く範囲は、中心  $(0, 1)$ ，半径 1 の閉円板  $X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$  から、直線  $X = 0$  上の点と点  $(1, 1)$  を除いた部分である。

この範囲を図示すると次の網掛け部分である。赤い破線上の点と白丸は含まない。



## ▶ 解法 2

### 【方針】

接点の  $x$  座標  $t$  を媒介変数として残す。接線条件から  $c = at$  を得た後、条件  $1 + c^2 \leq 2a$  を  $a$  の 2 次不等式に直す。判別式と解の範囲から、接点の  $y$  座標が  $1 \pm \sqrt{1 - t^2}$  の間を動くことを示し、円板を直接得る。

### 【解答】

(1)

接点の  $x$  座標を  $t$  とする。共有点条件と傾き一致条件は

$$at^2 = b(t-1)^2 + c, \quad at = b(t-1)$$

である。第 2 式を第 1 式へ用いると

$$at^2 = at(t-1) + c$$

だから

$$c = at.$$

したがって接点は

$$(t, at^2) = \left( \frac{c}{a}, \frac{c^2}{a} \right)$$

である。

(2)

接点を  $(t, Y)$  と書けば

$$c = at, \quad Y = at^2.$$

条件 (i) は

$$1 + a^2 t^2 \leq 2a,$$

すなわち

$$t^2 a^2 - 2a + 1 \leq 0$$

となる。

この 2 次不等式を満たす実数  $a$  が存在するには判別式が非負でなければならないから

$$4 - 4t^2 \geq 0, \quad |t| \leq 1.$$

また  $c = at \neq 0$  より  $t \neq 0$ 、傾き条件  $at = b(t-1)$  と  $a \neq 0$  より  $t \neq 1$  である。

$t \neq 0$  のもとで  $a$  の範囲は

$$\frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t^2}.$$

両辺に  $t^2$  を掛け、 $Y = at^2$  を用いると

$$1 - \sqrt{1 - t^2} \leq Y \leq 1 + \sqrt{1 - t^2}.$$

これは

$$t^2 + (Y - 1)^2 \leq 1$$

と同値である。

逆に、この円板内で  $t \neq 0, 1$  の点  $(t, Y)$  を取れば

$$a = \frac{Y}{t^2}, \quad c = \frac{Y}{t}, \quad b = \frac{Y}{t(t-1)}$$

とおくことができる。 $t \neq 0$  の円板内では  $Y > 0$  なので、 $a, b, c$  はすべて 0 でなく、元の条件を満たす。

よって接点の範囲は

$$X^2 + (Y - 1)^2 \leq 1$$

から  $X = 0$  上の点と  $(1, 1)$  を除いた部分である。

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。接点を  $(t, at^2)$  と置き、共有点条件と傾き一致条件から  $c = at$  を得るのが出発点である。文字を  $X, Y$  に消去する方法と、 $t$  を残して  $a$  の 2 次不等式を解く方法の双方で

$$X^2 + (Y - 1)^2 \leq 1$$

が得られる。図示では円板を塗るだけでなく、 $c \neq 0$  に対応する  $X = 0$  上の全点と、 $b \neq 0$ ・接線条件から除かれる  $(1, 1)$  を明示する。逆向きに  $a, b, c$  を構成し、範囲内の各点が実現することも確認した。

## 【第 2 問】

整数  $n$  に対し、

$$n^3 - 7n + 9$$

が素数となるような  $n$  をすべて求めよ。

## ▶ 解法 1

### 【方針】

整数  $n$  について  $n^3 \equiv n \pmod{3}$  が成り立つことを使い、 $n^3 - 7n + 9$  が常に 3 で割り切れることを示す。素数は正の約数を 1 と自分自身しかもたない正の整数なので、3 で割り切れる素数なら値は 3 に限られる。あとは  $n^3 - 7n + 9 = 3$  を因数分解して整数解を求め、実際に値が 3 になることを確認する。

### 【解答】

任意の整数  $n$  について  $n^3 \equiv n \pmod{3}$  である。したがって  $n^3 - 7n + 9 \equiv n - n + 0 \equiv 0 \pmod{3}$  であり、 $n^3 - 7n + 9$  は常に 3 で割り切れる。

この値が素数であるとする。素数は正の整数であり、しかも 3 で割り切れるので、その値は 3 でなければならない。よって  $n^3 - 7n + 9 = 3$  を解けばよい。これは  $n^3 - 7n + 6 = 0$  すなわち  $(n - 1)(n - 2)(n + 3) = 0$  である。したがって  $n = -3, 1, 2$  を得る。

実際、これらの値では  $n^3 - 7n + 9 = 3$  となるので素数である。以上より、求める整数は  $-3, 1, 2$  である。

## ▶ 解法 2

## 【方針】

式を  $3 + (n-1)(n-2)(n+3)$  と変形する。3 つの因子  $n-2, n-1, n+3$  は 3 で割った余りが互いに異なるので、その積は必ず 3 の倍数である。したがって元の式も 3 の倍数であり、素数になるには 3 に等しいことが必要である。

## 【解答】

恒等式

$$n^3 - 7n + 9 = 3 + (n-1)(n-2)(n+3)$$

を用いる。

3 整数  $n-2, n-1, n+3$  を 3 で割った余りは、順序を除けば  $0, 1, 2$  である。したがって

$$3 \mid (n-1)(n-2)(n+3)$$

であり、 $n^3 - 7n + 9$  も 3 の倍数である。

この値が素数なら、正の素数で 3 の倍数であるから

$$n^3 - 7n + 9 = 3$$

でなければならない。よって

$$(n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

となり、

$$n = -3, 1, 2$$

を得る。いずれを代入しても元の式の値は 3 であるため、これらはすべて条件を満たす。

【総評】 難度 4、目安時間 10 分。式が常に 3 の倍数であることを見抜く整数問題である。合同式  $n^3 \equiv n \pmod{3}$  を使う方法と、 $3 + (n-1)(n-2)(n+3)$  へ変形する方法の双方で検算できる。「3 で割り切れる」だけで終えず、素数を正の整数として扱って値が 3 に限られること、さらに  $n = -3, 1, 2$  を代入して実現を確認することまで書く。

## ■ 【第 3 問】 ■

$\alpha$  は

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

を満たす定数とし、四角形  $ABCD$  に関する次の 2 条件を考える。

(i) 四角形  $ABCD$  は半径 1 の円に内接する。

(ii)

$$\angle ABC = \angle DAB = \alpha.$$

条件 (i), (ii) を満たす四角形のうち、4 辺の長さの積

$$k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

が最大となるものについて、 $k$  の値を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

半径 1 の円に内接しているので、各辺の長さは対応する中心角  $\phi$  を用いて  $2\sin(\phi/2)$  と表せる。辺  $AB, BC, CD, DA$  に対応する中心角を順に  $x, y, z, w$  とおき、円周角条件  $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$  を弧の中心角の和に直す。そこから  $w = y$  を得て、 $u = y/2$  により全ての辺長を 1 変数で表す。最後は  $v = \sin^2 u$  として 2 次式の最大値に帰着する。

## 【解答】

辺  $AB, BC, CD, DA$  に対応する中心角をそれぞれ  $x, y, z, w$  とする。円の半径は 1 なので、中心角が  $\phi$  である弦の長さは  $2\sin \frac{\phi}{2}$  である。

円周角  $\angle ABC$  は、点  $B$  を含まない弧  $ADC$  に対応するので  $\frac{w+z}{2} = \alpha$  である。また  $\angle DAB$  は、点  $A$  を含まない弧  $DCB$  に対応するので  $\frac{z+y}{2} = \alpha$  である。したがって  $w+z=2\alpha$ ,  $z+y=2\alpha$  であり、 $w=y$  を得る。

ここで  $u = \frac{y}{2} = \frac{w}{2}$  とおく。すると  $\frac{z}{2} = \alpha - u$  であり、中心角の和  $x+y+z+w=2\pi$  から  $\frac{x}{2} = \pi - \alpha - u$  である。よって  $\sin \frac{x}{2} = \sin(\alpha + u)$  である。

したがって 4 辺の長さの積は  $k = 16 \sin(\alpha + u) \sin u \sin(\alpha - u) \sin u$  である。ここで  $\sin(\alpha + u) \sin(\alpha - u) = \sin^2 \alpha - \sin^2 u$  なので  $k = 16(\sin^2 \alpha - \sin^2 u) \sin^2 u$  である。 $0 \leq u \leq \alpha$  であり、 $0 < \alpha \leq \pi/2$  だから、 $v = \sin^2 u$  は  $0 \leq v \leq \sin^2 \alpha$  を動く。ゆえに  $k = 16(\sin^2 \alpha - v)v$  である。

これは  $v$  の 2 次式であり、最大は  $v = \frac{\sin^2 \alpha}{2}$  のときに起こる。この値は上の範囲に含まれる。したがって最大値は

$$16 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} = 4 \sin^4 \alpha$$

である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

円に内接する四角形の対角の和が  $\pi$  であることから  $AB \parallel CD$  を示し、等脚台形  $AD = BC$  を得る。対角線  $AC$  で分け、 $x = \angle BAC$  とおく。半径 1 の外接円に対する正弦定理で 4 辺を  $2 \sin x$ ,  $2 \sin(\alpha \pm x)$  と表し、 $\sin^2 x$  の 2 次式を最大化する。

### 【解答】

円に内接する四角形なので

$$\angle ABC + \angle ADC = \pi, \quad \angle DAB + \angle BCD = \pi.$$

仮定より  $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$  だから

$$\angle BCD = \angle ADC = \pi - \alpha.$$

特に

$$\angle ABC + \angle BCD = \pi$$

であるから  $AB \parallel CD$  である。また底辺  $AB$  の両端の角が等しいので、この台形は等脚台形であり

$$AD = BC$$

である。

ここで

$$x = \angle BAC$$

とおく。対角線  $AC$  は  $\angle DAB$  の内部にあるから

$$0 < x < \alpha, \quad \angle DAC = \alpha - x.$$

半径 1 の外接円に対して正弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BC &= 2 \sin x, \\ AB &= 2 \sin(\alpha + x), \\ CD &= 2 \sin(\alpha - x), \\ AD &= BC = 2 \sin x. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} k &= 16 \sin^2 x \sin(\alpha + x) \sin(\alpha - x) \\ &= 16 \sin^2 x (\sin^2 \alpha - \sin^2 x). \end{aligned}$$

$v = \sin^2 x$  とおく。 $0 < x < \alpha \leq \pi/2$  より

$$0 < v < \sin^2 \alpha.$$

よって

$$k = 16v(\sin^2 \alpha - v) = 4 \sin^4 \alpha - 16 \left( v - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)^2.$$

$\sin^2 \alpha / 2$  は上の範囲内にあるので、最大値は

$$4 \sin^4 \alpha$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。中心角で 4 辺を表す方法と、等脚台形を導いて対角線  $AC$  に正弦定理を使う方法がある。どちらも

$$k = 16 \sin^2 x (\sin^2 \alpha - \sin^2 x)$$

へ帰着する。 $v = \sin^2 x$  とおけば下に凸ではなく上に凸の 2 次式で、頂点  $v = \sin^2 \alpha / 2$  が  $0 < v < \sin^2 \alpha$  に実際に含まれることを確認する。弧と円周角の対応、特に  $\angle ABC$  が見込む弧  $ADC$  を取り違えないことが重要である。

#### 【第 4 問】

コインを  $n$  回投げ、複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を次のように定める。

(i) 1 回目に表が出れば

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

とし、裏が出れば  $z_1 = 1$  とする。

(ii)  $k = 2, 3, \dots, n$  のとき、 $k$  回目に表が出れば

$$z_k = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$$

とし、裏が出れば  $z_k = \overline{z_{k-1}}$  とする。ただし、 $\overline{z_{k-1}}$  は  $z_{k-1}$  の共役複素数である。

このとき、 $z_n = 1$  となる確率を求めよ。

#### ▶ 解法 1

##### 【方針】

$\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$  とおくと  $\omega^3 = 1$  であり、 $z_n$  は  $1, \omega, \omega^2$  の 3 状態だけを動く。表なら指数が 1 増え、裏なら共役を取る。この 3 状態で終わる列の数を  $a_n, b_n, c_n$  として遷移式を作る。初期値から  $a_n = b_n$  が保たれることを使い、 $a_{n+1} = 2^n - a_n$  を解いて、最後に全事象数  $2^n$  で割る。

##### 【解答】

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  とおく。すると  $\omega^3 = 1$ ,  $\bar{\omega} = \omega^2$ ,  $\overline{\omega^2} = \omega$  である。したがって  $z_n$  は常に  $1, \omega, \omega^2$  のいずれかである。 $n$  回後に  $1, \omega, \omega^2$  となる表裏の列の数をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  とする。表が出ると  $\omega$  を掛けるので指数が 1 増え、裏が出ると共役になるので  $\omega$  と  $\omega^2$  が入れ替わり、1 はそのままである。よって  $a_{n+1} = a_n + c_n$ ,  $b_{n+1} = a_n + c_n$ ,  $c_{n+1} = 2b_n$  である。

1 回目では、裏なら 1, 表なら  $\omega$  であるから  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $c_1 = 0$  である。上の漸化式の第 1 式と第 2 式は同じ形なので、 $a_1 = b_1$  から帰納的に  $a_n = b_n$  である。また全事象数は  $2^n$  通りなので  $a_n + b_n + c_n = 2^n$  であり、 $c_n = 2^n - 2a_n$  である。したがって  $a_{n+1} = a_n + c_n = 2^n - a_n$  を得る。

この漸化式を解く。 $a_{n+1} + a_n = 2^n$  であり、 $a_1 = 1$  である。ここから  $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$  が成り立つことは帰納法で確認できる。実際、この式が  $n$  で成り立つとすると

$$a_{n+1} = 2^n - a_n = 2^n - \frac{2^n - (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$$

である。

したがって求める確率は  $\frac{a_n}{2^n} = \frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$  である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

3 状態  $1, \omega, \omega^2$  にいる確率を直接置く。遷移を表にすると、次時刻に  $1$  と  $\omega$  にいる確率は常に等しい。全確率が  $1$  であることを使い、 $p_n = P(z_n = 1)$  だけの 1 次漸化式  $p_{n+1} = (1 - p_n)/2$  に落として解く。

### 【解答】

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

とおくと、

$$\omega^3 = 1, \quad \bar{\omega} = \omega^2.$$

したがって  $z_n$  は  $1, \omega, \omega^2$  の 3 状態だけを取る。

それぞれの状態にいる確率を

$$p_n = P(z_n = 1), \quad q_n = P(z_n = \omega), \quad r_n = P(z_n = \omega^2)$$

とする。表・裏による遷移は

| 現在         | 表          | 裏          |
|------------|------------|------------|
| 1          | $\omega$   | 1          |
| $\omega$   | $\omega^2$ | $\omega^2$ |
| $\omega^2$ | 1          | $\omega$   |

である。よって

$$p_{n+1} = \frac{p_n + r_n}{2}, \quad q_{n+1} = \frac{p_n + r_n}{2}, \quad r_{n+1} = q_n.$$

最初の 2 式から  $p_{n+1} = q_{n+1}$  であり、初期値も

$$p_1 = q_1 = \frac{1}{2}, \quad r_1 = 0$$

だから、すべての  $n \geq 1$  で  $p_n = q_n$  である。

全確率より

$$r_n = 1 - p_n - q_n = 1 - 2p_n.$$

したがって

$$p_{n+1} = \frac{p_n + 1 - 2p_n}{2} = \frac{1 - p_n}{2}.$$

定常値  $1/3$  を引くと

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left( p_n - \frac{1}{3} \right).$$

$p_1 = 1/2$  なので

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

ゆえに

$$p_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^n}.$$

これが求める確率である。

**【総評】** 難度 6、目安時間 25 分。複素数の計算を続けるのではなく、 $\omega^3 = 1$  を用いて  $1, \omega, \omega^2$  の 3 状態へ落とす。表は指数を 1 進め、裏は共役により指数の符号を反転する。操作列の個数を数える方法と状態確率を追う方法の双方から

$$P(z_n = 1) = \frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

を得た。遷移表で  $\omega$  からは表・裏のどちらでも  $\omega^2$  へ移る点を確認し、 $n = 1, 2$  の直接列挙で初期値と符号を検算する。

## 【第 5 問】

曲線  $y = \log x$  上の点  $A(t, \log t)$  における法線上に、点  $B$  を  $AB = 1$  となるように取る。ただし、 $B$  の  $x$  座標は  $t$  より大きいとする。

(1) 点  $B$  の座標  $(u(t), v(t))$  を求めよ。また、

$$\left( \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right)$$

を求めよ。

(2) 実数  $r$  は  $0 < r < 1$  を満たすとする。 $t$  が  $r$  から 1 まで動くとき、点  $A$  と点  $B$  が描く曲線の長さをそれぞれ  $L_1(r), L_2(r)$  とする。このとき、

$$\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r))$$

を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

点  $A(t, \log t)$  での接線の傾きは  $1/t$  なので、法線方向のうち  $x$  座標が増える向きの単位ベクトルは  $(1, -t)/\sqrt{1+t^2}$  である。これを  $A$  に足して  $B$  を表し、 $u'(t), v'(t)$  を求める。曲線の長さは速度の積分なので、 $A$  と  $B$  の速さを比較する。 $B$  の速さを 2 乗して整理すると差が簡約され、長さの差は

$$\int_r^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

となる。

## 【解答】

(1) 曲線  $y = \log x$  の  $x = t$  における接線の傾きは  $\frac{1}{t}$  である。したがって法線の傾きは  $-t$  であり、法線方向のベクトルとして  $(1, -t)$  を取る。 $B$  の  $x$  座標は  $t$  より大きいので、向きは  $(1, -t)$  の向きである。長さ 1 の単位ベクトルは  $\frac{(1, -t)}{\sqrt{1+t^2}}$  であるから、 $B = (t, \log t) + \frac{(1, -t)}{\sqrt{1+t^2}}$  である。よって  $u(t) = t + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ,  $v(t) = \log t - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$  である。

微分すると  $\frac{du}{dt} = 1 - \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$  である。また  $\frac{d}{dt} \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$  なので  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$  である。

(2) 点  $A$  の速度ベクトルは  $(1, \frac{1}{t})$  であるから、速さは  $\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$  である。

次に点  $B$  の速さを求める。 $s = \sqrt{1+t^2}$  とおくと、(1) より

$$\left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \left( 1 - \frac{t}{s^3} \right)^2 + \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{s^3} \right)^2$$

である。展開して整理すると

$$\left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{s^2}{t^2} - \frac{2}{ts} + \frac{1}{s^4} = \left( \frac{s}{t} - \frac{1}{s^2} \right)^2$$

である。 $t > 0$  で右辺の括弧内は正なので、点  $B$  の速さは  $\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2}$  である。

したがって、 $t$  が  $r$  から 1 まで動くときの長さの差は

$$L_1(r) - L_2(r) = \int_r^1 \left\{ \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{1}{1+t^2} \right) \right\} dt$$

すなわち

$$L_1(r) - L_2(r) = \int_r^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

である。よって

$$\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r)) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

点  $A$  の単位接ベクトル  $\boldsymbol{T}$  と、 $x$  成分が正の単位法ベクトル  $\boldsymbol{N}$  を置く。 $B = A + \boldsymbol{N}$  と表し、 $\boldsymbol{N}'$  が  $\boldsymbol{T}$  の定数倍になることを直接計算する。すると  $\boldsymbol{A}'$  と  $\boldsymbol{B}'$  が同方向になり、2 つの速さの差がただちに  $1/(1+t^2)$  と分かる。

### 【解答】

(1)

点  $A(t, \log t)$  の速度ベクトルは

$$\boldsymbol{A}'(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right).$$

接線方向の単位ベクトルと、 $x$  成分が正の法線方向の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{(t, 1)}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \boldsymbol{N}(t) = \frac{(1, -t)}{\sqrt{1+t^2}}$$

とおく。 $AB = 1$  で  $B$  の  $x$  座標が大きいから

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{N}(t).$$

よって

$$u(t) = t + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad v(t) = \log t - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

微分して

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) = \left(1 - \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}, \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\right).$$

(2)

$s = \sqrt{1+t^2}$  とおく。まず

$$\boldsymbol{A}'(t) = \frac{s}{t} \boldsymbol{T}(t)$$

である。また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}'(t) &= \left(-\frac{t}{s^3}, -\frac{1}{s^3}\right) \\ &= -\frac{1}{s^2} \boldsymbol{T}(t). \end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{B}'(t) = \boldsymbol{A}'(t) + \boldsymbol{N}'(t) = \left(\frac{s}{t} - \frac{1}{s^2}\right) \boldsymbol{T}(t).$$

$t > 0$  では括弧内は正なので、点  $A, B$  の速さはそれぞれ

$$\frac{s}{t}, \quad \frac{s}{t} - \frac{1}{s^2}$$

である。よって

$$\begin{aligned} L_1(r) - L_2(r) &= \int_r^1 \frac{1}{s^2} dt \\ &= \int_r^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \arctan r. \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r)) = \frac{\pi}{4}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。法線の 2 方向のうち、 $B$  の  $x$  座標が  $t$  より大きい条件から  $(1, -t)$  側を選ぶ。座標を成分ごとに微分して速さを平方完成する方法と、単位接ベクトル・単位法ベクトルを使う方法の双方で、速さの差が

$$\frac{1}{1+t^2}$$

になる。積分はすべて独立表示とし、

$$L_1(r) - L_2(r) = \frac{\pi}{4} - \arctan r$$

まで求めてから  $r \rightarrow +0$  とする。 $n$  や符号の取り違えがないよう、 $t = 1$  で速度成分を数値確認するとよい。

## 【第 6 問】

四面体  $ABCD$  は

$$AC = BD, \quad AD = BC$$

を満たすとし、辺  $AB$  の中点を  $P$ 、辺  $CD$  の中点を  $Q$  とする。(1) 辺  $AB$  と線分  $PQ$  は垂直であることを示せ。(2) 線分  $PQ$  を含む平面  $\alpha$  で四面体  $ABCD$  を切って 2 つの部分に分ける。このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

中点  $P$  を原点に取り、 $A, B$  を反対向きのベクトル  $\vec{a}, -\vec{a}$  で表す。同様に  $Q$  の位置を  $\vec{q}$  とし、 $C, D$  を  $\vec{q} + \vec{c}, \vec{q} - \vec{c}$  と表す。辺長条件  $AC = BD, AD = BC$  を 2 乗して展開すると、 $\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0, \vec{q} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$  が得られ、ここから  $\vec{q} \cdot \vec{a} = 0$  を導く。(2) は同時に  $\vec{q} \cdot \vec{c} = 0$  も出ることを用い、 $PQ$  を軸とする 180 度回転が  $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$  を入れ替える対称性で体積を二等分する。

## 【解答】

(1) 点  $P$  を原点とする。 $P$  は  $AB$  の中点なので、あるベクトル  $\vec{a}$  を用いて  $A = \vec{a}, B = -\vec{a}$  と表せる。また  $Q$  の位置ベクトルを  $\vec{q}$  とし、 $Q$  が  $CD$  の中点であることから、あるベクトル  $\vec{c}$  を用いて  $C = \vec{q} + \vec{c}, D = \vec{q} - \vec{c}$  と表す。

条件  $AC = BD$  より  $|\vec{q} + \vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{q} - \vec{c} + \vec{a}|^2$  である。右辺は  $|\vec{q} - (\vec{c} - \vec{a})|^2$  であるから、差を取ると  $4\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$  すなわち  $\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$  である。

同様に  $AD = BC$  より  $|\vec{q} - \vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{q} + \vec{c} + \vec{a}|^2$  であり、これは  $\vec{q} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$  を与える。2 つの式を引くと  $\vec{q} \cdot \vec{a} = 0$  である。

ここで  $\overrightarrow{PQ} = \vec{q}, \overrightarrow{AB} = B - A = -2\vec{a}$  である。したがって  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  となり、辺  $AB$  と線分  $PQ$  は垂直である。

(2) 上で得た 2 つの式  $\vec{q} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0, \vec{q} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$  を足すと  $\vec{q} \cdot \vec{c} = 0$  である。よって  $PQ$  は  $AB$  だけでなく  $CD$  にも垂直である。

直線  $PQ$  を軸として空間を 180 度回転させることを考える。この回転では  $\vec{q}$  の方向はそのまま保たれ、 $\vec{q}$  に垂直な成分は符号が反対になる。いま  $\vec{a}$  も  $\vec{c}$  も  $\vec{q}$  に垂直であるから、この回転によって

$$\vec{a} \leftrightarrow -\vec{a}, \quad \vec{q} + \vec{c} \leftrightarrow \vec{q} - \vec{c}$$

となる。すなわち  $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$  である。

平面  $\alpha$  は軸  $PQ$  を含むので、この 180 度回転で平面  $\alpha$  は自分自身に移る。また、この回転は平面  $\alpha$  の両側を入れ替える。したがって、平面  $\alpha$  によって分けられた四面体の 2 つの部分は、この回転により互いに移り合う。回転は体積を保つので、2 つの部分の体積は等しい。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

(1) は  $P$  を原点として中点ベクトルを置き、2つの辺長条件の差から  $PQ \perp AB$  と  $PQ \perp CD$  を得る。(2) では  $PQ$  を  $z$  軸、切断平面  $\alpha$  を  $xz$  平面に選ぶ。4 頂点の座標が  $z$  軸まわりの 180 度回転で 2 組に交換されることを座標で示し、平面の両側の体積が等しいと結論する。

### 【解答】

(1)

$P$  を原点とし、

$$A = \mathbf{a}, \quad B = -\mathbf{a}, \quad Q = \mathbf{q}, \quad C = \mathbf{q} + \mathbf{c}, \quad D = \mathbf{q} - \mathbf{c}$$

と表す。

$AC = BD$  の両辺を 2 乗して差を取ると

$$4\mathbf{q} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

同様に  $AD = BC$  から

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 0$$

を得る。2 式の差と和を取れば

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q}$ ,  $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{a}$  だから

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

したがって  $AB \perp PQ$  である。

(2)

$PQ$  を  $z$  軸とし、 $PQ$  を含む平面  $\alpha$  を  $xz$  平面とするように直交座標を取る。 $P = (0, 0, 0)$ ,  $Q = (0, 0, h)$  と書く。

上で  $\mathbf{a}, \mathbf{c}$  はともに  $\mathbf{q}$  と垂直であることを示した。よって適当な実数  $u, v, r, s$  により

$$\begin{aligned} A &= (u, v, 0), & B &= (-u, -v, 0), \\ C &= (r, s, h), & D &= (-r, -s, h) \end{aligned}$$

と表せる。

$z$  軸まわりに 180 度回転する写像は

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$$

である。この回転により

$$A \longleftrightarrow B, \quad C \longleftrightarrow D$$

となるから、四面体  $ABCD$  は自分自身に移る。一方、切断平面  $\alpha$  は  $y = 0$  であり回転後も不変だが、 $y > 0$  の側と  $y < 0$  の側は交換される。

したがって、平面  $\alpha$  で切られた 2 つの部分はこの回転で互いに移り合う。回転は体積を保つので、2 つの部分の体積は等しい。

**【総評】** 難度 7、目安時間 30 分。(1) は辺長条件を 2 乗して差を取り、中点ベクトルとの内積だけを残す。2 式の差と和から  $PQ \perp AB$  と  $PQ \perp CD$  が同時に得られる。(2) は  $PQ$  を軸とする 180 度回転が  $A \leftrightarrow B$ ,  $C \leftrightarrow D$  を引き起こすことを、ベクトルでも直交座標でも示せる。切断平面が不変であること、その両側が交換されること、回転が体積を保存することの 3 点を明記する。