

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



京 都 大 学 2020 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

$a, b$  は実数で,  $a > 0$  とする.  $z$  に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが  $\sqrt{3}a$  の正三角形の頂点となっているとする. このとき,  $a, b$  と  $(*)$  の 3 つの解を求めよ.

## 第 2 問

$p$  を正の整数とする.  $\alpha, \beta$  は  $x$  に関する方程式  $x^2 - 2px - 1 = 0$  の 2 つの解で,  $|\alpha| > 1$  であるとする.

- (1) すべての正の整数  $n$  に対し,  $\alpha^n + \beta^n$  は整数であり, さらに偶数であることを証明せよ.
- (2) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$  を求めよ.

### 第 3 問

$k$  を正の実数とする. 座標空間において, 原点  $O$  を中心とする半径 1 の球面上の 4 点  $A, B, C, D$  が次の関係式を満たしている.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k$$

このとき,  $k$  の値を求めよ. ただし, 座標空間の点  $X, Y$  に対して,  $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$  は,  $\overrightarrow{OX}$  と  $\overrightarrow{OY}$  の内積を表す.

## 第 4 問

正の整数  $a$  に対して,

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき,  $B(a) = b$  と定める. 例えば,  $B(3^2 \cdot 5) = 2$  である.

$m, n$  は整数で, 次の条件を満たすとする.

(i)  $1 \leq m \leq 30$ .

(ii)  $1 \leq n \leq 30$ .

(iii)  $n$  は 3 で割り切れない.

このような  $(m, n)$  について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また,  $A(m, n)$  の最大値を与えるような  $(m, n)$  をすべて求めよ.

## 第 5 問

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |

## 第 6 問

$x, y, z$  を座標とする空間において,  $xz$  平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を  $z$  軸のまわりに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を  $S$  とする. この  $S$  をさらに  $x$  軸のまわりに 1 回転させるとき,  $S$  が通過した部分よりなる立体を  $V$  とする. このとき,  $V$  の体積を求めよ.

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)