

京都大学 2020 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b は実数で, $a > 0$ とする. z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする. このとき, a, b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ.

▶ 解法 1 (正三角形の中心から回転表示する方法)

【方針】

解の平均から正三角形の中心を求め, 中心から各頂点へのベクトルを $w, w\omega, w\omega^2$ と表す. 係数比較と辺長条件から a, b, w^3 を決める.

【解答】

3 解を z_1, z_2, z_3 とすると

$$z_1 + z_2 + z_3 = -3a.$$

正三角形の重心は中心でもあるから, その中心は複素数 $-a$ で表される。

$\omega^3 = 1, 1 + \omega + \omega^2 = 0$ を満たす 1 でない複素数 ω を取る. 中心から 3 頂点への複素数を

$$w, \quad w\omega, \quad w\omega^2$$

と書けば, 3 解は

$$-a + w, \quad -a + w\omega, \quad -a + w\omega^2.$$

したがって方程式は

$$(z + a)^3 - w^3 = 0.$$

もとの式と係数を比べて

$$b = 3a^2, \quad a^3 - w^3 = 1.$$

辺長は

$$|w - w\omega| = \sqrt{3}|w|$$

であり, これが $\sqrt{3}a$ に等しいので $|w| = a$ である. よって

$$|a^3 - 1| = |w^3| = a^3.$$

$a > 0$ だから

$$a^3 = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad b = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

このとき

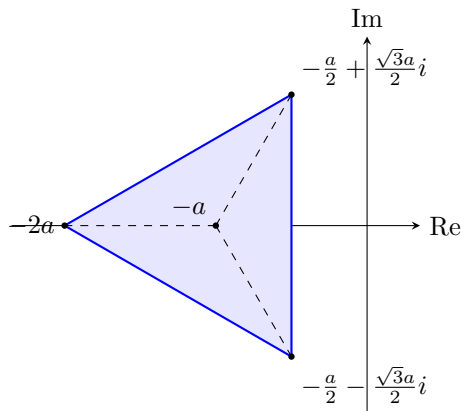
$$(z + a)^3 = -a^3.$$

したがって 3 解は

$$-2a, \quad -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2}i, \quad -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}a}{2}i.$$

$a = 1/\sqrt[3]{2}$ を代入すると

$$-\sqrt[3]{4}, \quad -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}i, \quad -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}i.$$



▶ 解法 2 (平行移動して 3 次式を簡単にする方法)

【方針】

$w = z + a$ と平行移動して 2 次項を消す。中心が原点の正三角形の 3 頂点は 120 度回転で入れ替わるため、 w の 1 次項が消えることを使う。

【解答】

$$w = z + a$$

とおく。もとの方程式は

$$w^3 + (b - 3a^2)w + (2a^3 - ab + 1) = 0. \quad (1)$$

z 平面で正三角形の中心は解の平均 $-a$ だから、 w 平面では 3 解の中心は原点である。中心が原点の正三角形の頂点は

$$\rho, \quad \rho\omega, \quad \rho\omega^2$$

と表せる。この 3 数の 2 つずつの積の和は

$$\rho^2(\omega + \omega^2 + \omega^3) = 0.$$

したがって (1) の w の係数は 0 であり、

$$b = 3a^2.$$

よって (1) は

$$w^3 + 1 - a^3 = 0.$$

正三角形の中心から頂点までの距離は、一辺の長さの $1/\sqrt{3}$ 倍だから

$$|\rho| = a.$$

一方、 $\rho^3 = a^3 - 1$ なので

$$|a^3 - 1| = a^3.$$

これを解くと

$$a^3 = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad b = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

さらに $w^3 = -a^3$ の 3 解から

$$z = -2a, \quad z = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}a}{2}i$$

を得る。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 25 分。解の和は正三角形の中心を与え、2 次項を消す平行移動 $w = z + a$ と一致する。中心から頂点までの距離は一辺の $1/\sqrt{3}$ 倍なので $|w| = a$ である。最後に $|a^3 - 1| = a^3$ の符号を分け、 $a > 0$ と 3 解が相異なることを確認する。

【第 2 問】

p を正の整数とする. α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の 2 つの解で, $|\alpha| > 1$ であるとする.

- (1) すべての正の整数 n に対し, $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数であることを証明せよ.
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ.

▶ 解法 1 (漸化式で偶整数性を示す方法)

【方針】

$S_n = \alpha^n + \beta^n$ に 2 項間漸化式を作り、初期値から偶整数性を帰納する。極限は S_n が偶整数であることと $\beta = -1/\alpha$ を使い、小さい角へ移す。

【解答】

(1)

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = -1.$$

$S_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。各解が

$$x^2 = 2px + 1$$

を満たすので

$$S_{n+2} = 2pS_{n+1} + S_n.$$

初期値は

$$S_0 = 2, \quad S_1 = 2p$$

で、ともに偶整数である。したがって数学的帰納法により、すべての正の整数 n について S_n は偶整数である。

(2)

$$\alpha = p + \sqrt{p^2 + 1} > 1, \quad \beta = p - \sqrt{p^2 + 1} = -\frac{1}{\alpha}.$$

S_n は偶整数だから

$$\sin(\pi\alpha^n) = \sin\{\pi(S_n - \beta^n)\} = -\sin(\pi\beta^n).$$

また

$$\beta^n = (-1)^n \alpha^{-n}.$$

よって

$$\begin{aligned} (-\alpha)^n \sin(\pi\alpha^n) &= -(-1)^n \alpha^n \sin(\pi\beta^n) \\ &= -\alpha^n \sin(\pi\alpha^{-n}). \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ で $\pi\alpha^{-n} \rightarrow 0$ だから

$$\alpha^n \sin(\pi\alpha^{-n}) = \pi \frac{\sin(\pi\alpha^{-n})}{\pi\alpha^{-n}} \rightarrow \pi.$$

したがって極限は

$$-\pi.$$

▶ 解法 2 (二項展開で偶整数性を示す方法)

【方針】

2 解を $p \pm \sqrt{p^2 + 1}$ と明示して二項展開する。奇数個の根号を含む項が打ち消し合い、残りが 2 倍の整数になることを示す。

【解答】

(1)

$$\alpha = p + \sqrt{p^2 + 1}, \quad \beta = p - \sqrt{p^2 + 1}.$$

二項展開して加えると、 $\sqrt{p^2 + 1}$ の奇数乗を含む項は打ち消し合う。したがって

$$\alpha^n + \beta^n = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} {}_nC_{2j} p^{n-2j} (p^2 + 1)^j.$$

右辺は整数の 2 倍なので、すべての正の整数 n について偶整数である。

(2)

$|\alpha| > 1$ だから $\alpha = p + \sqrt{p^2 + 1}$ であり、

$$\beta = -\alpha^{-1}.$$

(1) の偶整数を S_n と書けば

$$\alpha^n = S_n - \beta^n.$$

よって

$$\sin(\pi \alpha^n) = -\sin(\pi \beta^n) = -(-1)^n \sin(\pi \alpha^{-n}).$$

したがって

$$(-\alpha)^n \sin(\pi \alpha^n) = -\alpha^n \sin(\pi \alpha^{-n}) \rightarrow -\pi.$$

【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 28 分。(1) では漸化式でも二項展開でも、単に整数ではなく偶整数まで示す。(2) で角を $S_n - \beta^n$ に移すとき、 S_n が偶数だから余分な符号が生じない。さらに $\beta = -1/\alpha$ と $(-\alpha)^n$ の符号を 1 行ずつ整理し、最後に $\sin x/x \rightarrow 1$ を適用する。

【第 3 問】

k を正の実数とする。座標空間において、原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{1}{2},$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OD} = \vec{OB} \cdot \vec{OD} = k$$

このとき、 k の値を求めよ。ただし、座標空間の点 X, Y に対して、 $\vec{OX} \cdot \vec{OY}$ は、 $\vec{OX}$ と $\vec{OY}$ の内積を表す。

▶ 解法 1 (対称な方向へ直交分解する方法)

【方針】

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ を使う。条件から $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ はともに $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ に垂直なので、残る 2 方向の成分だけで内積を計算する。

【解答】

$$\mathbf{a} = \vec{OA}, \quad \mathbf{b} = \vec{OB}, \quad \mathbf{c} = \vec{OC}, \quad \mathbf{d} = \vec{OD}$$

とおく。4 本はすべて単位ベクトルである。また

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

そこで

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\sqrt{3}}$$

とおくと、 $\boldsymbol{u}$ は単位ベクトルである。

条件から

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

さらに

$$\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0, \quad \boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0.$$

よって $\boldsymbol{u}$ に垂直な共通方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば、向きを適切に選んで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{d} &= \frac{2k}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u} + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{4k^2}{3}}\boldsymbol{v} \quad (\varepsilon = \pm 1) \end{aligned}$$

と書ける。

$\varepsilon = -1$ なら 2 方向の内積がどちらも負になり、 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} = 1/2$ に反する。したがって $\varepsilon = 1$ で、

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}k + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{4k^2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

平方根を移項して平方すると

$$16k^2 + 12\sqrt{\frac{2}{3}}k - 3 = 0.$$

$k > 0$ であるから

$$k = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}.$$

▶ 解法 2 (座標を対称に設定する方法)

【方針】

A, B を x 軸について対称に置く。内積条件を引き算すると C, D の y 成分が 0 となり、残りは xz 平面内の 2 次元計算になる。

【解答】

座標軸を適切に選び、

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \boldsymbol{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

とおく。どちらも単位ベクトルで、内積は $1/2$ である。

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とする。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

の 2 式を引くと $c_2 = 0$ 、加えると

$$\sqrt{3}c_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

よって

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

座標軸の向きを選び直して

$$\boldsymbol{c} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

としてよい。

同様に $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ について

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = k$$

から

$$d_2 = 0, \quad d_1 = \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

$|\mathbf{d}| = 1$ より

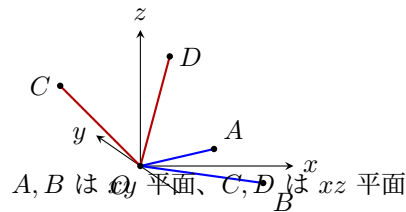
$$d_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2}{3}}.$$

$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 1/2 > 0$ と $k > 0$ を同時に満たすには $d_3 > 0$ でなければならない。したがって

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}k + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{4k^2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

これを解き、正の根を取ると

$$k = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}.$$



【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 25 分。条件の対称性から $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ を選ぶと、4 本のベクトルが実質 2 次元に落ちる。座標解法では A, B を対称に置くことで同じ構造が見える。垂直成分の符号は $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 1/2 > 0$ から決め、平方前の右辺が正であることを確認してから正の根を採る。

【第 4 問】

正の整数 a に対して、

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき、 $B(a) = b$ と定める。例えば、 $B(3^2 \cdot 5) = 2$ である。

m, n は整数で、次の条件を満たすとする。

- (i) $1 \leq m \leq 30$.
- (ii) $1 \leq n \leq 30$.
- (iii) n は 3 で割り切れない。

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とすると、

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ。また、 $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (法を 3 倍ずつ上げる方法)

【方針】

法 3、9、27、81 の順に割り切れる条件を絞る。最大値が 4 であることを示すため、最後に法 243 では割り切れないことまで確認する。

【解答】

以下

$$f = m^3 + n^2 + n + 3$$

と書く。

法 3 では $m^3 \equiv m$ である。 $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ を使うと、

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{3} & \Rightarrow m \equiv 1 \pmod{3}, \\ n \equiv 2 \pmod{3} & \Rightarrow m \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

これを法 9 まで調べると、9 で割り切れるための必要十分条件は

$$m \equiv 0 \pmod{3}, \quad n \equiv 2 \pmod{9}$$

である。実際、法 9 で許される n の剰余

$$1, 2, 4, 5, 7, 8$$

と m の剰余を代入すれば、 $(m \bmod 3, n \bmod 9) = (0, 2)$ だけが残る。

範囲内で $n \equiv 2 \pmod{9}$ となるのは

$$n = 2, 11, 20, 29.$$

$m \equiv 0 \pmod{3}$ なら $m^3 \equiv 0 \pmod{27}$ であり、

$$n^2 + n + 3 \equiv 9, 0, 18, 9 \pmod{27}$$

だから、27 で割り切れるには

$$n = 11$$

でなければならない。

このとき

$$f(m, 11) = m^3 + 135.$$

$m \equiv 0 \pmod{3}$ のもとで法 81 を調べると、

$$m \equiv 3 \pmod{9}$$

のときに限って 81 で割り切れる。範囲内では

$$m = 3, 12, 21, 30.$$

最後に $m = 3r$ とおくと

$$f(m, 11) = 27(r^3 + 5).$$

上の 4 つでは $r \equiv 1 \pmod{3}$ であり、法 9 で $r^3 \equiv 1$ だから

$$r^3 + 5 \equiv 6 \pmod{9}.$$

したがって f は 81 では割り切れるが 243 では割り切れない。

よって最大値は

$$4$$

であり、それを与える組は

$$(m, n) = (3, 11), (12, 11), (21, 11), (30, 11)$$

である。

▶ 解法 2 (変数を置き換えて 3 進の指数を追う方法)

【方針】

9 で割り切れる条件から $m = 3r$, $n = 9q + 2$ と置く。式を展開すると、27 で割れる条件が $q \equiv 1 \pmod{3}$ 、81 で割れる条件が $r \equiv 1 \pmod{3}$ と順に読める。

【解答】

まず法 9 の有限な剰余を調べると

$$9 \mid f(m, n) \iff m = 3r, \quad n = 9q + 2$$

と書ける。

これを代入すると

$$\begin{aligned} f(m, n) &= 27r^3 + (9q + 2)^2 + (9q + 2) + 3 \\ &= 9(3r^3 + 9q^2 + 5q + 1). \end{aligned}$$

27 で割り切れる条件は、括弧内が 3 で割り切れることだから

$$2q + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

すなわち $q \equiv 1 \pmod{3}$ である。

$1 \leq n \leq 30$ では $q = 0, 1, 2, 3$ なので、 $q = 1$ 、したがって

$$n = 11.$$

このとき

$$f(3r, 11) = 27(r^3 + 5).$$

81 で割り切れる条件は

$$r^3 + 5 \equiv 0 \pmod{3}.$$

$r^3 \equiv r \pmod{3}$ より

$$r \equiv 1 \pmod{3}.$$

$1 \leq m = 3r \leq 30$ だから

$$r = 1, 4, 7, 10,$$

すなわち

$$m = 3, 12, 21, 30.$$

さらに $r \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $r^3 \equiv 1 \pmod{9}$ なので

$$r^3 + 5 \equiv 6 \pmod{9}.$$

ゆえに 3 では割れるが 9 では割れず、

$$B(f) = 3 + 1 = 4.$$

以上より最大値と 4 組が得られる。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 30 分。法 3 だけで一気に結論へ進まず、法 9 で $m = 3r$, $n = 9q + 2$ まで絞ると、その後は式の因数 9、27 を追える。最大値 4 の証明には、81 で割れる 4 組を出すだけでなく、243 では割れないことまで必要である。範囲 $1 \leq m, n \leq 30$ は q, r の候補を有限個にするために使う。

【第 5 問】

縦 4 個、横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい、縦の並びを列という．どの行にも、どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

▶ 解法 1 (第 1 行・第 1 列を固定する方法)

【方針】

数字名と行の入れ替えを使い、第 1 行と第 1 列をともに 1, 2, 3, 4 に固定した標準形を数える．標準形 4 通りに、固定を戻す $4!$ と $3!$ を掛ける．

【解答】

数字の名前を入れ替えて第 1 行を

1, 2, 3, 4

に固定する．さらに下 3 行を入れ替えて、第 1 列も

1, 2, 3, 4

に固定する．

第 2 行は先頭が 2 で、各列の先頭の数字と重ならないため、候補は

(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3)

の 3 通りである．これらを完成させると、標準形は次の 4 通りになる．

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

よって標準形は 4 通りである．

第 1 行の並べ方は $4!$ 通りで、第 1 行を固定した後の第 1 列下 3 個の並べ方は $3!$ 通りである．したがって

$$4 \cdot 4! \cdot 3! = 576.$$

▶ 解法 2 (第 1 行だけ固定して数える方法)

【方針】

第 1 行だけを 1, 2, 3, 4 に固定する。第 2 行第 1 列の数字は 3 通りで対称であり、それを 2 に固定した場合の完成数 8 通りを数える。

【解答】

まず第 1 行を

$$(1, 2, 3, 4)$$

に固定する。

第 2 行第 1 列には 2, 3, 4 のいずれかが入る。この 3 つは数字名の入れ替えで対称だから、第 2 行第 1 列を 2 とした場合だけを数え、最後に 3 倍する。

このとき第 2 行は

$$(2, 1, 4, 3), \quad (2, 3, 4, 1), \quad (2, 4, 1, 3)$$

のいずれかである。

第 2 行が (2, 1, 4, 3) のとき、第 3 行は

$$(3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$$

の 4 通りで、その後の第 4 行は一意に決まる。

第 2 行が (2, 3, 4, 1) のときは第 3 行が 2 通り、第 2 行が (2, 4, 1, 3) のときも第 3 行が 2 通りであり、いずれも第 4 行は一意に決まる。よって第 2 行第 1 列を 2 とした完成数は

$$4 + 2 + 2 = 8$$

通りである。

第 1 行を固定した全体では

$$3 \cdot 8 = 24$$

通り。第 1 行自体の並べ方 $4!$ を戻すと

$$24 \cdot 4! = 576$$

通りである。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 25 分。これは 4 次のラテン方陣の数え上げである。対称性で第 1 行・第 1 列を固定する解法では、固定を戻す $4!$ と $3!$ を掛け忘れない。第 1 行だけを固定する解法では、第 2 行第 1 列の 3 候補が対称であることと、3 種類の第 2 行から完成数が 4, 2, 2 通りになることを明示する。原問題にある 4×4 の例も問題冊子へ復元した。

【第 6 問】

x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

▶ 解法 1 (固定した座標の環状断面を積分する方法)

【方針】

最初の回転面を $r = e^{z^2} - 1$ と表す. 固定した x に対し, 2 回目の回転でできる断面の内半径と外半径を求め, 環状断面の面積を積分する.

【解答】

最初の回転でできる面 S は, z 軸からの距離を

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

とすると

$$r = e^{z^2} - 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{\log 2}$$

で表される.

2 回目の回転について, 固定した x での断面を考える. S 上にその x 座標をもつ点がある条件は

$$|x| \leq e^{z^2} - 1,$$

すなわち

$$z^2 \geq \log(1 + |x|)$$

である.

S 上では

$$y^2 = (e^{z^2} - 1)^2 - x^2.$$

x 軸からの距離を R とすると

$$R^2 = y^2 + z^2 = (e^{z^2} - 1)^2 - x^2 + z^2.$$

右辺は $z \geq 0$ で狭義単調増加する. したがって断面は環状領域になる.

最大の z は $\sqrt{\log 2}$ であり,

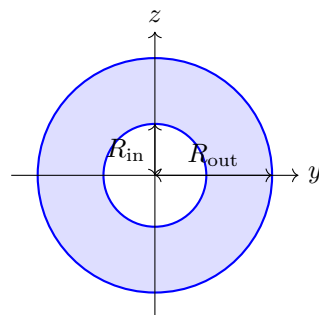
$$R_{\text{out}}^2 = 1 - x^2 + \log 2.$$

最小の z は $e^{z^2} - 1 = |x|$ を満たすので,

$$R_{\text{in}}^2 = \log(1 + |x|).$$

よって断面積は

$$\pi \{1 - x^2 + \log 2 - \log(1 + |x|)\}.$$



固定した x における環状断面

断面積は偶関数だから

$$V = 2\pi \int_0^1 \{1 - x^2 + \log 2 - \log(1+x)\} dx.$$

また

$$\int_0^1 \log(1+x) dx = 2 \log 2 - 1.$$

したがって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \log 2 - (2 \log 2 - 1) \right\} \\ &= \frac{10\pi}{3} - 2\pi \log 2. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (外側の立体から中央の穴を引く方法)

【方針】

固定した x の断面を、外側の円板から内側の円板を除いたものと見る。外側と穴の体積を別々に積分し、最後に差を取る。

【解答】

固定した x に対し、最初の面上の点を x 軸のまわりに回したときの半径 R は

$$R^2 = (e^{z^2} - 1)^2 - x^2 + z^2.$$

これは z とともに増加する。

外側の境界は

$$z = \sqrt{\log 2}, \quad e^{z^2} - 1 = 1$$

から

$$R_{\text{out}}^2 = 1 + \log 2 - x^2.$$

一方、中央の穴の境界は $y = 0$ 、すなわち

$$e^{z^2} - 1 = |x|$$

から

$$R_{\text{in}}^2 = \log(1 + |x|).$$

そこで、まず外側をすべて満たした立体の体積を

$$V_{\text{out}} = \pi \int_{-1}^1 (1 + \log 2 - x^2) dx$$

とする。偶関数性から

$$V_{\text{out}} = 2\pi \left(1 + \log 2 - \frac{1}{3} \right).$$

中央の穴の体積は

$$V_{\text{hole}} = \pi \int_{-1}^1 \log(1 + |x|) dx = 2\pi \int_0^1 \log(1 + x) dx.$$

部分積分により

$$V_{\text{hole}} = 2\pi(2 \log 2 - 1).$$

したがって

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{out}} - V_{\text{hole}} \\ &= \frac{10\pi}{3} - 2\pi \log 2. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 35 分。最初の回転でできるのは中身をもつ立体ではなく回転面である。2 回目の回転では、固定した x の断面が円板ではなく環状領域になる。半径の 2 乗が z とともに増加することを確認して内外の境界を決める。積分はすべて独立行に置き、 $|x|$ は偶関数性で処理する。