

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2024 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

- (1) p_4 を求めよ．
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ．

第 2 問

$|x| \leq 2$ を満たす複素数 x と, $|y - (8 + 6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して, $z = \frac{x+y}{2}$ とする. このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し, その面積を求めよ.

第 3 問

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする．線分 OA の中点を P ，線分 AB の中点を Q とする．実数 x, y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める．

$$\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ．

第 4 問

与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を次のように定める．

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．
- (2) $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

第 5 問

a は $a \geq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq y, \quad y \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} S_a$ を求めよ．

第 6 問

自然数 k に対して, $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする. n を自然数とし, a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする. また, a_k の整数部分が n 桁であり, その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする. 次を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし, 例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で, 最高位の数字は 2 である.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)