

京都大学 2024 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

- (1) p_4 を求めよ．
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ．

【方針】

(1) は文系第 2 問と同じく，立方体の面を向かい合う 3 組に分け，隣接面で同色にならない条件を「3 組で使う色集合が互いに交わらない」と読む．4 色では色集合の大きさが $(1, 1, 1)$ または $(2, 1, 1)$ なので，それぞれ数える．(2) は全数え上げをせず，隣り合う面の 12 組のうち少なくとも 1 組が同色になる確率を上から評価する．各組が同色になる確率は $1/n$ なので，余事象の確率は高々 $12/n$ である．

【解答】

(1) 立方体の向かい合う面を 3 組に分ける．辺を共有しないのは向かい合う 2 面だけなので，条件を満たすためには，各向かい合う組で使う色集合が互いに交わらないことが必要十分である．

4 色の場合，3 組の色集合の大きさは $(1, 1, 1)$ または $(2, 1, 1)$ である．

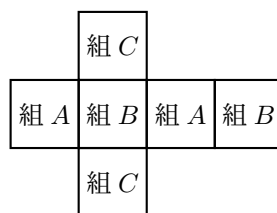
$(1, 1, 1)$ の場合，3 組に異なる 3 色を割り当てるので $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 通りである．

$(2, 1, 1)$ の場合，2 色を使う組の選び方が 3 通り，その 2 色の選び方が ${}_4C_2$ 通り，その 2 色を向かい合う 2 面に塗る順序が 2 通り，残り 2 組への色の割り当てが 2 通りである．よって $3 \cdot {}_4C_2 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ 通りである．

したがって条件を満たす塗り方は $24 + 72 = 96$ 通りである．全体の塗り方は 4^6 通りなので $p_4 = \frac{96}{4^6} = \frac{3}{128}$ である．

(2) 条件を満たさない事象は，辺を共有する 2 面で同じ色が塗られている組が少なくとも 1 組あることである．立方体には辺が 12 本あり，それぞれが辺を共有する 2 面の組に対応する．

ある 1 組の隣り合う 2 面に注目すると，1 つ目の面の色が何であっても，2 つ目の面が同じ色になる確率は $\frac{1}{n}$ である．したがって，12 組のうち少なくとも 1 組で同色になる確率は，高々 $\frac{12}{n}$ である．よって $1 - \frac{12}{n} \leq p_n \leq 1$ である．はさみうちにより $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ である．



立方体を開いた図．同じ記号どうしが向かい合う。

【総評】 彩色の直接計算と，余事象の上界評価を組み合わせる問題．目安時間は 18 分．(1) は向かい合う 3 組の色集合が互いに交わらないという必要十分条件から 96 通りを数える．(2) は厳密な p_n を求める必要がなく，12 本の辺のどこかで両側面が同色になる確率を和事象の確率の上界で $12/n$ 以下に抑える．

公式出題意図との対応：公式は (1) で場合の数と確率の諸性質，(2) で数列の極限に関する計算力と論理性を見るところとしている．解答では $1 - 12/n \leq p_n \leq 1$ を明示し，はさみうちへつないだ．

出典確認：公式問題 PDF 第 2 ページの理系第 1 問と原寸照合済み．公式「出題意図等」は本問の意図のみで数値解答はない．公式 URL の保存版を用いた．

独立検算：4 色の全 $4^6 = 4096$ 通りを列挙して適合 96 通りを確認した．また $n = 3, \dots, 30$ の厳密な彩色数でも $p_n \rightarrow 1$ となり，余事象上界と整合する．

【第 2 問】

$|x| \leq 2$ を満たす複素数 x と、 $|y - (8 + 6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して、 $z = \frac{x + y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し、その面積を求めよ。

【方針】

$x/2$ は原点中心半径 1 以下の円板を動き、 $(y - (8 + 6i))/2$ は原点中心半径 3/2 の円周を動く。したがって z は中心 $4 + 3i$ に、半径 1 以下のベクトルと半径 3/2 のベクトルを足したものになる。和の原点からの距離は、三角形の辺の長さの条件から 1/2 以上 5/2 以下のすべての値をとれる。よって中心 $4 + 3i$ 、内半径 1/2、外半径 5/2 の円環である。

【解答】

条件を変形する。 $|x| \leq 2$ なので $\frac{x}{2}$ は原点中心、半径 1 以下の円板を動く。また $|y - (8 + 6i)| = 3$ より $\frac{y}{2} = 4 + 3i + \frac{y - (8 + 6i)}{2}$ であり、 $\frac{y - (8 + 6i)}{2}$ は原点中心、半径 $\frac{3}{2}$ の円周を動く。

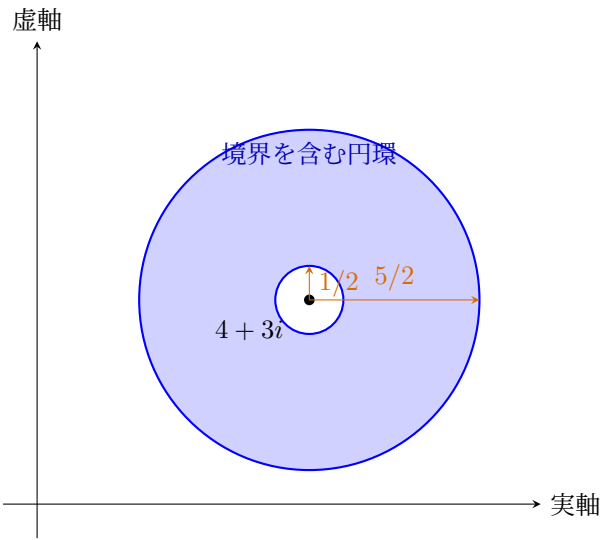
したがって $z = \frac{x + y}{2} = 4 + 3i + \frac{x}{2} + \frac{y - (8 + 6i)}{2}$ である。つまり、 $z - (4 + 3i)$ は、長さが 1 以下のベクトルと、長さが $\frac{3}{2}$ のベクトルの和である。

この和の長さを ρ とする。三角形の辺の長さの関係より、取りうる ρ は $|\frac{3}{2} - 1| \leq \rho \leq \frac{3}{2} + 1$ すなわち $\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{5}{2}$ である。逆に、 $1/2 \leq \rho \leq 3/2$ なら長さ 3/2 のベクトルと逆向きに長さ $3/2 - \rho$ のベクトルを、 $3/2 \leq \rho \leq 5/2$ なら同じ向きに長さ $\rho - 3/2$ のベクトルを加えればよい。どちらも加える長さは 1 以下なので、全範囲が実現できる。

よって z が動く領域は、複素数平面上で中心 $4 + 3i$ 、内半径 $\frac{1}{2}$ 、外半径 $\frac{5}{2}$ の円環である。したがって面積は

$$\pi \left\{ \left(\frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = \pi \cdot \frac{24}{4} = 6\pi$$

である。



【総評】 円板と円周のベクトル和を複素数平面上で読む問題。目安時間は 10 分。中心 $4 + 3i$ へ平行移動すると、長さ 3/2 のベクトルと長さ 1 以下のベクトルの和になる。距離 ρ は $1/2 \leq \rho \leq 5/2$ であり、同方向・逆方向の長さ調整によりこの全範囲が実現する。図示では中心、内外半径、境界を含むことを示す。

公式出題意図との対応：公式は複素数平面上的図形と複素数の関係の理解を問うとしている。解答では代数変形、ベクトル和、円環の実図、面積計算を一続きにした。

出典確認：公式問題 PDF 第 2 ページの理系第 2 問と原寸照合済み。公式資料は出題意図のみである。公式 URL の保存版を用いた。

独立検算：内外境界は $x/2$ を長さ 1 で固定円周のベクトルと同方向・逆方向に取ることで達成される。面積は $\pi\{(5/2)^2 - (1/2)^2\} = 6\pi$ と再計算した。

【第 3 問】

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 線分 OA の中点を P , 線分 AB の中点を Q とする. 実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める.

$$\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC}$$

このとき, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ.

【方針】

O を原点とし, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ に関する係数を座標として使う. この係数座標で P, Q, X, Y と 2 直線の方法を表す. 2 直線が同一平面上にある必要十分条件は, 2 方向と 2 直線上の点を結ぶベクトルの 3 本が一次従属になることであり, 行列式から $x = y$ を得る.

【解答】

O, A, B, C は同一平面上にないので, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立である. 距離や角度は使わないから, これらに関する係数を座標として $O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1)$ と表してよい. この係数座標は平行性・交点・共面性を保つ.

このとき, 線分 OA の中点 P と線分 AB の中点 Q は $P = (\frac{1}{2}, 0, 0), Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ である. また, $\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OC}$ より $X = (0, 0, x)$ であり, $\overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC}$ より $Y = B + y(C - B) = (0, 1 - y, y)$ である.

直線 PX の方向ベクトルは $\overrightarrow{PX} = X - P = (-\frac{1}{2}, 0, x)$ であり, 直線 QY の方向ベクトルは $\overrightarrow{QY} = Y - Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - y, y)$ である. また, 2 直線上の点 P, Q を結ぶベクトルとして $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, \frac{1}{2}, 0)$ をとる.

2 直線が同一平面上にあるための条件は, $\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{QY}, \overrightarrow{PQ}$ が同一平面内にあることである. 成分で計算すると, この条件は

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & x \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - y & y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

である. この行列式は $\frac{y-x}{4}$ であるから, 同一平面上にある条件は $x = y$ である.

空間内の 2 直線がねじれの位置にあるとは, 同一平面上にないことをいう. したがって, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための必要十分条件は $x \neq y$ である.

【総評】 非共面な 4 点を係数座標の基底にし, 2 直線の共面条件を判定する問題. 目安時間は 18 分. 距離や角度を使わないため, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ に関する係数を通常の座標のように扱える. 2 つの方向ベクトルと 2 直線上の点を結ぶベクトルの行列式が 0 であることが, 共面の必要十分条件である.

公式出題意図との対応: 公式は「ねじれの位置」を必要十分条件で表現し, 論証して結論を導けるかを問うとしている. 解答では $x = y$ が共面条件であることを示し, その否定 $x \neq y$ まで必要十分性を閉じた.

出典確認: 公式問題 PDF 第 2 ページの理系第 3 問と原寸照合済み. 公式資料は出題意図のみである. 公式 URL の保存版を用いた.

独立検算: 係数行列式を展開して $(y-x)/4$ を確認した. $x = y$ では共面, $x \neq y$ では同一平面に入らず, 平行・交差も起こらないのでねじれの位置となる.

【第 4 問】

与えられた自然数 a_0 に対して、自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。
- (2) $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

【方針】

奇数 a_n から次も奇数になる条件を合同式で調べると、 $a_n \equiv 3 \pmod{4}$ が必要十分である。より長く奇数が続く条件は、 $a_n + 1$ に含まれる 2 の因子の個数で管理できる。 $a_0 = 2^r q - 1$ (q は奇数) と書くと、奇数が続く間は $a_j = 3^j 2^{r-j} q - 1$ となり、 $j = r$ で偶数になる。したがって $a_0, a_1, \dots, a_m$ がすべて奇数であるには $r \geq m + 1$ が必要十分で、最小値は $q = 1$, $r = m + 1$ のときである。

【解答】

まず、奇数 a_n に対して次の項も奇数になる条件を調べる。 a_n が奇数のとき $a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{2}$ である。これが奇数であるためには $3a_n + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ であればよい。これは $3a_n \equiv 1 \pmod{4}$ と同値であり、 $3 \equiv -1 \pmod{4}$ より $a_n \equiv 3 \pmod{4}$ である。

長く奇数が続く条件を一般化する。自然数 a_0 を $a_0 = 2^r q - 1$ と書く。ただし q は奇数、 $r \geq 1$ である。この形なら a_0 は奇数である。奇数の項が続く限り、 $a_{j+1} = \frac{3a_j + 1}{2}$ なので、帰納的に $a_j = 3^j 2^{r-j} q - 1$ ($0 \leq j \leq r$) となる。実際、 j から $j + 1$ へは $\frac{3(3^j 2^{r-j} q - 1) + 1}{2} = 3^{j+1} 2^{r-j-1} q - 1$ である。

この式から、 $j = 0, 1, \dots, r - 1$ では a_j は奇数であり、 $j = r$ では $a_r = 3^r q - 1$ となって偶数である。したがって、 $a_0, a_1, \dots, a_m$ がすべて奇数であるためには $r \geq m + 1$ が必要十分である。最小の a_0 は $q = 1, r = m + 1$ のときで、 $a_0 = 2^{m+1} - 1$ である。

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるには $m = 3$ とすればよい。したがって最小値は $2^4 - 1 = 15$ である。
- (2) $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ がすべて奇数であるには $m = 10$ とすればよい。したがって最小値は $2^{11} - 1 = 2047$ である。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a_j + 1 = 3^j 2^{r-j} q & & & & \\
 & & \text{2 の指数が 1 ずつ減る} & & & & \\
 & 2^r q & 3 \cdot 2^{r-1} q & 3^2 \cdot 2^{r-2} q & 3^{r-1} \cdot 2q & 3^r q & \\
 \hline
 & 0 & 1 & 2 & r-1 & r & j
 \end{array}$$

【総評】 奇数が連続する長さを $a_0 + 1$ の 2 の因子で管理する数列問題。目安時間は 16 分。 $a_0 = 2^r q - 1$ (q は奇数) とすると、奇数が続く間は $a_j + 1 = 3^j 2^{r-j} q$ となり、1 回進むごとに 2 の指数が 1 減る。 a_0 から a_m まで奇数にする条件は $r \geq m + 1$ で、最小値は $q = 1$ で得られる。

公式出題意図との対応：公式は漸化式の題意を必要十分条件で論じ説明できるかを問うとしている。解答では合同式による 1 段階の確認、一般式の帰納、最小性の証明をすべて示した。

出典確認：公式問題 PDF 第 3 ページの理系第 4 問と原寸照合済み。公式資料は出題意図のみである。公式 URL の保存版を用いた。

独立検算： $a_0 = 15$ と 2047 から漸化式を実際に 10 段階追い、指定範囲がすべて奇数であることと次項が偶数になることを確認した。各値未満の自然数を全探索して最小性も確認した。

【第 5 問】

a は $a \geq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq y, \quad y \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} S_a$ を求めよ．

▶ 解法 1

【方針】

下側は $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，上側は $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ と水平線 $y = a$ の小さい方である． $a \geq 1$ なので， $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = a$ となる点を A ， $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = a$ となる点を B とおくと， $0 \leq x \leq A$ では上下の指数関数の差， $A \leq x \leq B$ では水平線 $y = a$ と下側の差を積分する．(2) では平方根の差が 0 に近づくことと，対数項が 0 に近づくことを不等式で押さえる．

【解答】

(1) 上側の曲線 $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ が a に等しくなる点を A ，下側の曲線 $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ が a に等しくなる点を B とおく． $a \geq 1$ なので $A \geq 0$ であり， $\frac{e^A + e^{-A}}{2} = a$ ， $\frac{e^B - e^{-B}}{2} = a$ である．これを解くと

$$A = \log(a + \sqrt{a^2 - 1}), \quad B = \log(a + \sqrt{a^2 + 1})$$

である．

$0 \leq x \leq A$ では，水平線 $y = a$ は上側の曲線より上にあるので，領域の高さは $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$ である． $A \leq x \leq B$ では，上側は水平線 $y = a$ になり，領域の高さは $a - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ である．したがって

$$S_a = \int_0^A e^{-x} dx + \int_A^B \left(a - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx$$

である．

計算すると

$$\int_0^A e^{-x} dx = 1 - e^{-A}$$

であり， $e^A = a + \sqrt{a^2 - 1}$ より $e^{-A} = a - \sqrt{a^2 - 1}$ である．また

$$\int_A^B \left(a - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx = a(B - A) - \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_A^B$$

である．ここで $\frac{e^A + e^{-A}}{2} = a$ ， $\frac{e^B + e^{-B}}{2} = \sqrt{a^2 + 1}$ なので，

$$\int_A^B \left(a - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx = a(B - A) - \sqrt{a^2 + 1} + a$$

である．

以上を合わせると $S_a = 1 + \sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1} + a(B - A)$ であり， $B - A = \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ だから

$$S_a = 1 + \sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$$

である．

(2) まず $\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 - 1}}$ であるから， $\sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1} \rightarrow 0$ ($a \rightarrow \infty$) である．

次に対数項を調べる。 a が十分大きいとき、 $R_a = \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} > 1$ であり、 $0 < \log R_a < R_a - 1$ である。また

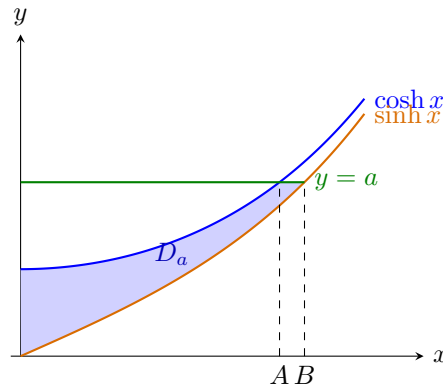
$$\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 - 1}} < \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \leq \frac{2}{a}$$

が $a \geq 2$ で成り立つ。また $a + \sqrt{a^2 - 1} > a$ だから

$$0 < R_a - 1 < \frac{2}{a^2}$$

である。よって $0 < a \log R_a < a(R_a - 1) < \frac{2}{a}$ となり、 $a \log R_a \rightarrow 0$ である。

したがって $\lim_{a \rightarrow \infty} S_a = 1 + 0 + 0 = 1$ である。



図は $a = 2$ の例。 $A = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$, $B = \log(a + \sqrt{a^2 + 1})$ 。

▶ 解法 2 ((2) の領域による別解)

【方針】

水平線の制限を外した無限帯の面積が 1 であることを上界にする。一方、 $0 \leq x \leq A$ の曲線間の帯が D_a に含まれることから $1 - e^{-A}$ を下界とし、はさみうちを用いる。

【解答】

(1) 面積の式は解法 1 と同じである。

(2) 水平線 $y = a$ による制限を外した領域は、 $x \geq 0$ で $\sinh x \leq y \leq \cosh x$ を満たす帯であり、その面積は

$$\int_0^\infty (\cosh x - \sinh x) dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

である。したがって $S_a \leq 1$ である。

一方、 $A = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$ とすると、 $0 \leq x \leq A$ では水平線 $y = a$ が上側の曲線 $y = \cosh x$ 以上にあるので、この区間の帯はすべて D_a に含まれる。よって

$$S_a \geq \int_0^A e^{-x} dx = 1 - e^{-A}$$

である。 $a \rightarrow \infty$ なら $A \rightarrow \infty$ であり、 $e^{-A} \rightarrow 0$ だから

$$1 - e^{-A} \leq S_a \leq 1$$

にはさみうちを適用して

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S_a = 1$$

を得る。

【総評】 双曲線関数型の 2 曲線と水平線で囲まれる面積を分割積分する問題。目安時間は 25 分。 $\cosh x = a$ の交点 A と $\sinh x = a$ の交点 B を区別し、 $[0, A]$ では曲線間の差 e^{-x} 、 $[A, B]$ では $a - \sinh x$ を積分する。極限は式から評価する方法に加え、 $1 - e^{-A} \leq S_a \leq 1$ という幾何的なはさみうちが簡潔である。

公式出題意図との対応：公式は (1) で領域面積を定積分で正しく表して計算できるか、(2) で関数の極限を論理的に求められるかを見ている。解答では領域図、交点、積分区間、極限評価を明示した。

出典確認：公式問題 PDF 第 3 ページの理系第 5 問と原寸照合済み。公式資料は出題意図のみである。公式 URL の保存版を用いた。

独立検算： $a = 1, 2, 5, 10$ で定積分を数値計算し、閉じた式と一致した。既存稿の誤った評価 $\sqrt{a^2+1} - \sqrt{a^2-1} < 1/a$ を修正し、正しい $O(1/a)$ 評価と独立なはさみうちの双方で極限 1 を確認した。

【第 6 問】

自然数 k に対して、 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする。 n を自然数とし、 a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。 また、 a_k の整数部分が n 桁であり、その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。 次を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし、例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で、最高位の数字は 2 である。

【方針】

整数部分が n 桁である条件は $10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$ である。 $c = \log_2 10$ とおくと、これは $(n-1)c \leq \sqrt{k} < nc$ 、すなわち k が長さ $(2n-1)c^2$ の区間に入る条件になる。最高位が 1 である条件は $10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 2 \cdot 10^{n-1}$ で、同様に長さ $2(n-1)c+1$ の区間になる。区間に含まれる整数の個数は区間長との差が高々一定なので、個数比の極限は区間長の比の極限に等しい。

【解答】

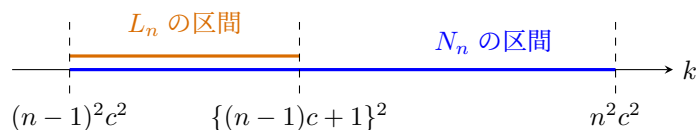
$c = \log_2 10$ とおく。 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ の整数部分が n 桁であるための条件は $10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$ である。底 2 の対数をとると $(n-1)c \leq \sqrt{k} < nc$ であり、さらに平方して $(n-1)^2 c^2 \leq k < n^2 c^2$ となる。したがって N_n は、この半开区間に含まれる自然数 k の個数である。この区間の長さは $n^2 c^2 - (n-1)^2 c^2 = (2n-1)c^2$ である。

次に、整数部分が n 桁で最高位の数字が 1 である条件を考える。これは $10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 2 \cdot 10^{n-1}$ である。底 2 の対数をとると $(n-1)c \leq \sqrt{k} < 1 + (n-1)c$ であり、平方して $(n-1)^2 c^2 \leq k < \{1 + (n-1)c\}^2$ となる。したがって L_n は、この半开区間に含まれる自然数 k の個数である。この区間の長さは $\{1 + (n-1)c\}^2 - (n-1)^2 c^2 = 2(n-1)c + 1$ である。

半开区間 $[U, V)$ に含まれる整数の個数を m とすると $|m - (V - U)| \leq 1$ である。したがって $N_n = (2n-1)c^2 + O(1)$ 、 $L_n = 2(n-1)c + 1 + O(1)$ であり、両区間長は n とともに無限大になるので、個数の比の極限は区間長の比の極限と一致する。よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)c + 1}{(2n-1)c^2} \\ &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

である。 $c = \log_2 10$ なので $\frac{1}{c} = \log_{10} 2$ である。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n} = \log_{10} 2$ である。



【総評】 桁数・最高位条件を k の半开区間へ変換し、区間内の整数個数の比を取る問題。目安時間は 24 分。 $c = \log_2 10$ とおくと、 N_n の区間長は $(2n-1)c^2$ 、 L_n の区間長は $2(n-1)c + 1$ となる。半开区間内の整数個数と区間長の差が 1 以下であるため、両者に $O(1)$ を付けて極限へ移せる。

公式出題意図との対応：公式は指数・対数を用いて条件を適切に表現し、極限を計算して説明する力を見ている。解答では整数部分と実数範囲の同値性、平方後の区間、整数個数誤差を順に記した。

出典確認：公式問題 PDF 第 3 ページの理系第 6 問と原寸照合済み。公式資料は出題意図のみである。公式 URL の保存版を用いた。

独立検算：床関数で N_n, L_n を厳密に数える式を作り、 n を増やした比が $\log_{10} 2$ へ収束することを数値確認した。区間端点が整数の場合も半开区間として扱えば誤差は一様に有界である。