

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2025 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の各問に答えよ.

問 1 i は虚数単位とする. 複素数 z が, 絶対値が 2 である複素数全体を動くとき, $\left| z - \frac{i}{z} \right|$ の最大値と最小値を求めよ.

問 2 次の定積分の値を求めよ.

(1)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x^3 + 1}{x^2 + 1} dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} dx$$

第 2 問

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ.

第 3 問

e は自然対数の底とする. $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x), g(x)$ を考える.

$$f(x) = x^2 \log x$$

$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2 \log x}$$

実数 t は $t > \frac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線に垂直で, 点 $(t, g(t))$ を通る直線を l_t とする. 直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする. t が $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e$ の範囲を動くとき, $p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

第 4 問

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. s, t, u は 0 でない実数とする. 直線 OA 上の点 L , 直線 OB 上の点 M , 直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{OL} = s\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{ON} = u\overrightarrow{OC}$$

が成り立つようにとる.

- (1) s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき, 3 点 L, M, N の定める平面 LMN は, s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ. さらに, そのような点 P はただ一つに定まることを示せ.
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を V とする. (1) における点 P について, 四面体 $PABC$ の体積を V を用いて表せ.

第 5 問

θ は実数とする. xyz 空間の 2 点 $A\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $P\left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき, その交点を Q とする. θ が $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め, その軌跡を xy 平面上に図示せよ.

第 6 問

n は 2 以上の整数とする. 1 枚の硬貨を続けて n 回投げる. このとき, k 回目 ($1 \leq k \leq n$) に表が出たら $X_k = 1$, 裏が出たら $X_k = 0$ として, $X_1, X_2, \dots, X_n$ を定める.

$$Y_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1}X_k$$

とするとき, Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)