

京都大学 2025 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の各問に答えよ.

問 1 i は虚数単位とする. 複素数 z が, 絶対値が 2 である複素数全体を動くとき, $\left|z - \frac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ.

問 2 次の定積分の値を求めよ.

(1)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x^3 + 1}{x^2 + 1} dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} dx$$

【方針】

問 1 は $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ と極形式でおき, $\left|z - \frac{i}{z}\right|^2$ を $\sin 2\theta$ の一次式まで落とす. 絶対値そのものではなく 2 乗を最大・最小化すれば, 平方根を取る段階で符号の心配がない. 問 2(1) は分子を 3 項に分け, $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \frac{2x}{x^2+1}$ と整理して基本積分に帰着する. (2) は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で半角の正負が決まることを確認して $\tan \frac{x}{2}$ に直す. 半角公式を使わず, 分子分母を有理化して $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ と見る別解も自然である.

【解答】

問 1 $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおく. このとき

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{i}{2} \cos \theta$$

であるから,

$$z - \frac{i}{z} = \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta\right) + i \left(2 \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \left|z - \frac{i}{z}\right|^2 &= \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 + \left(2 \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 \\ &= 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{1}{4}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{17}{4} - 2 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

$-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ であり, 両端の値は実際にとれるので, $\frac{9}{4} \leq \left|z - \frac{i}{z}\right|^2 \leq \frac{25}{4}$ となる. よって最小値は $\frac{3}{2}$, 最大値は $\frac{5}{2}$ である.

問 2 (1) まず被積分関数を 3 つに分けると,

$$\frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x^3 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x^3 + 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int_0^{\sqrt{3}} \left(2x - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[x^2 - \log(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} + [\arctan x]_0^{\sqrt{3}} \\ &= (2-1) + (3 - \log 4) + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

したがって求める値は $4 - \log 4 + \frac{\pi}{3}$ である。

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ では $\sin \frac{x}{2} \geq 0$, $\cos \frac{x}{2} > 0$ である。半角公式より

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = \tan \frac{x}{2}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx \\ &= \left[-2 \log \left(\cos \frac{x}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -2 \log \frac{\sqrt{2}}{2} = \log 2. \end{aligned}$$

別解。問 2(2) は有理化してもよい。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ では $\sin x \geq 0$ だから

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

である。したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = [-\log(1 + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log 2$$

となり、同じ値を得る。

【総評】 公式の出題意図は、問 1 で複素数の基礎理解、問 2 で数学 III の積分法の理解と計算力を問うとしている。複素数平面と積分の基本計算をまとめて処理する小問集合。目安時間は 18 分前後。問 1 は $|\dots|^2$ にしてから三角関数の範囲に帰着する部分が得点源で、 $\frac{i}{z}$ の実部・虚部の符号を誤りやすい。問 2(1) は原始関数を一つずつ明示すれば部分点を取りやすいが、 $2x^3/(x^2+1)$ の割り算を飛ばすと $\log 4$ の係数を落としやすい。(2) は半角公式の符号確認が必須であり、有理化による別解も含めて、端点で式が正しく扱えるかを確認したい。複素数の両端値と 2 つの定積分を数値積分でも独立検算し、すべて一致した。

【第 2 問】

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ.

【方針】

まず $N = 9z^2$ から $x^6 + y^4 \equiv 0 \pmod{9}$ が必要であることに注目する。6 乗の剰余は 3 で割れるかどうかで 0, 1 に分かれるが、4 乗の剰余は 0, 1, 4, 7 まで出するため、ここを雑に扱わない。3 $\nmid x$ と仮定すると和が 0 にならないことを示し、続いて 3 $\mid x$ から 3 $\mid y$ を導く。最後は x, y が正の 3 の倍数であることを使って、小さい候補 $x = 3, y = 3, 6$ だけを確実に調べる。

【解答】

$N = 9z^2$ であるから、必要条件として $x^6 + y^4 \equiv 0 \pmod{9}$ である。

整数 a について、3 $\mid a$ なら $a^6 \equiv 0 \pmod{9}$ であり、3 $\nmid a$ なら $a^6 \equiv 1 \pmod{9}$ である。また 4 乗については、9 で割った剰余を調べると $a^4 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod{9}$ のいずれかであり、特に 3 $\mid a$ のときだけ $a^4 \equiv 0 \pmod{9}$ となる。

もし 3 $\nmid x$ なら $x^6 \equiv 1 \pmod{9}$ である。このとき y^4 の剰余は 0, 1, 4, 7 のいずれかなので、 $x^6 + y^4 \equiv 1, 2, 5, 8 \pmod{9}$ となり、0 にはならない。したがって 3 $\mid x$ である。すると $x^6 \equiv 0 \pmod{9}$ なので、今度は $y^4 \equiv 0 \pmod{9}$ が必要であり、3 $\mid y$ である。

よって x, y はともに正の 3 の倍数である。候補を小さい順に見る。 $x \geq 6$ なら $x^6 \geq 6^6 > 2025$ であるから、2025 より小さい値を調べる段階では $x = 3$ しかない。さらに y も 3 の倍数である。

$x = 3, y = 3$ のとき $x^6 + y^4 = 3^6 + 3^4 = 729 + 81 = 810$ であり、 $810 = 9 \cdot 90$ だが 90 は平方数ではない。したがってこの値は条件を満たさない。

次に $x = 3, y = 6$ とすると $3^6 + 6^4 = 729 + 1296 = 2025 = 9 \cdot 15^2$ であるから、 $z = 15$ として条件を満たす。 x, y は正の 3 の倍数で、これより前の候補は上で尽くしているので、求める最小値は 2025 である。

【総評】 公式の出題意図は、整数を題材に正しく推論し、それを的確に記述する力を問うとしている。合同式で候補を強く絞る整数問題。目安時間は 15 分前後。最大の注意点は、4 乗数の 9 での剰余を 0, 1 だけと誤認しないことで、実際には 1, 4, 7 も現れる。採点上は 3 $\mid x, 3 \mid y$ を順に示す部分と、810 が 9 倍の平方数でないことを確認する部分が重要である。最後は「次の候補が成立する」だけでなく、それ以前の候補を 3 の倍数条件と単調性で尽くしたことを明記すると答案が締まる。正整数 x, y を独立全探索し、最初の成立例が (3, 6, 15)、 $N = 2025$ であることを確認した。

【第 3 問】

e は自然対数の底とする。 $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x), g(x)$ を考える。

$$f(x) = x^2 \log x$$

$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2 \log x}$$

実数 t は $t > \frac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線に垂直で、点 $(t, g(t))$ を通る直線を l_t とする。直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする。 t が $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e$ の範囲を動くとき、 $p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

【方針】

接線に垂直な直線の傾きを、 $f'(t) = t(1 + 2 \log t)$ から求める。 $u = 1 + 2 \log t$ とおくと、条件 $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e$ は $0 < u \leq 3$ となり、 $g(t)$ の分母も u で整理できる。 x 軸との交点は直線の式に $y = 0$ を代入して $p(t) = t + t u g(t)$ と表し、 $t = e^{(u-1)/2}$ を代入して 1 変数関数にする。最後は端点 $u = 3$ と内部の停留点 $u = \frac{2}{3}$ 、および $u = 0$ が含まれないことを確認して範囲を決める。

【解答】

$u = 1 + 2 \log t$ とおく。 $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e$ より $0 < u \leq 3$, $t = e^{\frac{u-1}{2}}$ である。

まず $f'(x) = 2x \log x + x = x(1 + 2 \log x)$ だから、曲線 $y = f(x)$ の $x = t$ における接線の傾きは $f'(t) = t(1 + 2 \log t) = tu$ である。したがって、これに垂直な直線 l_t の傾きは $-\frac{1}{tu}$ である。

l_t は点 $(t, g(t))$ を通るので、その方程式は $y - g(t) = -\frac{1}{tu}(x - t)$ である。 x 軸との交点では $y = 0$ であるから、その x 座標 $p(t)$ は $-g(t) = -\frac{1}{tu}(p(t) - t)$ すなわち $p(t) = t + tug(t)$ を満たす。

ここで

$$\log t = \frac{u-1}{2}, \quad g(t) = t^2 \log t - \frac{1}{u} = \frac{1}{2}t^2(u-1) - \frac{1}{u}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} p(t) &= t + tu \left(\frac{1}{2}t^2(u-1) - \frac{1}{u} \right) \\ &= t + \frac{1}{2}t^3u(u-1) - t \\ &= \frac{1}{2}t^3u(u-1) \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}(u-1)}u(u-1). \end{aligned}$$

よって $\phi(u) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}(u-1)}u(u-1)$ ($0 < u \leq 3$) の値域を調べればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}(u-1)} \left\{ \frac{3}{2}u(u-1) + 2u - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}(u-1)}(3u^2 + u - 2) \\ &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}(u-1)}(3u-2)(u+1). \end{aligned}$$

$0 < u \leq 3$ では $e^{\frac{3}{2}(u-1)} > 0$ かつ $u+1 > 0$ であるから、 $\phi(u)$ は $0 < u < \frac{2}{3}$ で減少し、 $\frac{2}{3} < u \leq 3$ で増加する。したがって最小値は $u = \frac{2}{3}$ でとり、

$$\phi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9\sqrt{e}}$$

である。また最大値は右端 $u = 3$ でとり、 $\phi(3) = \frac{1}{2}e^3 \cdot 3 \cdot 2 = 3e^3$ である。なお $u = 0$ は範囲に含まれないが、そこで最大・最小を与えるわけではない。

以上より、 $p(t)$ の取りうる値の範囲は $-\frac{1}{9\sqrt{e}} \leq p(t) \leq 3e^3$ である。

【総評】 公式の出題意図は、数学 III の微分法に関する理解と計算力を問うとしている。法線の x 切片を 1 変数関数に直して増減を調べる微分問題。目安時間は 25 分前後。得点源は、垂直な直線の傾きを $-1/(tu)$ とすること、 $p(t) = t + tug(t)$ の導出を省かないこと、 $u = 1 + 2 \log t$ の範囲を $0 < u \leq 3$ と正しく取ることである。 $u = 0$ が開端点である点に気を取られすぎると、内部最小 $u = 2/3$ の確認が薄くなりやすい。指数関数は常に正なので、増減表では $(3u-2)(u+1)$ の符号に集中すればよい。置換後の関数を細分点で独立走査し、内部最小値と右端最大値が解析結果に一致した。

【第 4 問】

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. s, t, u は 0 でない実数とする. 直線 OA 上の点 L , 直線 OB 上の点 M , 直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{OL} = s\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{ON} = u\overrightarrow{OC}$$

が成り立つようにとる.

- (1) s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき, 3 点 L, M, N の定める平面 LMN は, s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ. さらに, そのような点 P はただ一つに定まることを示せ.
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を V とする. (1) における点 P について, 四面体 $PABC$ の体積を V を用いて表せ.

【方針】

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を基底にして, 点を座標 (X, Y, Z) で表す. L, M, N はそれぞれ 3 本の座標軸上の切片なので, 平面 LMN は切片形 $\frac{X}{s} + \frac{Y}{t} + \frac{Z}{u} = 1$ で書ける. 条件式と同じ係数を持つ点を探せば一定点の存在が出る. 一意性は $a = 1/s, b = 1/t, c = 1/u$ とおき, $a + 2b + 3c = 4$ のもとで平面方程式が恒等的に成り立つことから係数比較する. 体積は, P の A, B, C に関する係数和が $3/2$ であるため, 平面 ABC からの距離が O の距離の $1/2$ になることを使う.

【解答】

(1) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立である. 点 Q を

$$\overrightarrow{OQ} = X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC}$$

と表すことにする. この座標で $L = (s, 0, 0), M = (0, t, 0), N = (0, 0, u)$ であるから, 平面 LMN は $\frac{X}{s} + \frac{Y}{t} + \frac{Z}{u} = 1$ と書ける.

いま

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

と定める. この点の座標は $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ である. したがって

$$\frac{1/4}{s} + \frac{1/2}{t} + \frac{3/4}{u} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} \right) = 1$$

となる. よって, 条件を満たすすべての s, t, u に対して, 点 P は平面 LMN 上にある.

次に一意性を示す. 条件を満たすすべての平面 LMN に共通する点を (X, Y, Z) とする. $a = \frac{1}{s}, b = \frac{1}{t}, c = \frac{1}{u}$ とおくと, 条件は $a + 2b + 3c = 4$ であり, 共通点であることから $aX + bY + cZ = 1$ が成り立つ. $c = \frac{4 - a - 2b}{3}$ を代入すると

$$a \left(X - \frac{Z}{3} \right) + b \left(Y - \frac{2Z}{3} \right) + \frac{4Z}{3} = 1$$

である. ここで a, b は条件を保ったまま範囲をもって動かせるので, a, b の係数はともに 0 でなければならない. したがって $X = \frac{Z}{3}, Y = \frac{2Z}{3}, \frac{4Z}{3} = 1$ となる. これより $(X, Y, Z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ であり, 共通点は上で得た P ただ一つである.

(2) 点 P は

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

であり, A, B, C の係数の和は $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ である. すなわち, O, A, B, C の係数の和を 1 とする表し方で書けば $P = -\frac{1}{2}O + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + \frac{3}{4}C$ である.

平面 ABC は, この座標では $X + Y + Z = 1$ で表される. O は $X + Y + Z = 0$, P は $X + Y + Z = \frac{3}{2}$ にある. したがって, 平面 ABC から P までの距離は, 平面 ABC から O までの距離の $|\frac{3}{2} - 0| = \frac{3}{2}$ 倍である. 底面を三角形 ABC と見れば, 四面体の体積は高さに比例するので, 四面体 $PABC$ の体積は四面体 $OABC$ の体積 V の $\frac{1}{2}$ 倍である.

よって求める体積は $\frac{V}{2}$ である.

【総評】 公式の出題意図は、空間ベクトルと空間図形の基礎理解および論証力を問うとしている。空間ベクトルを切片形の平面方程式に落とす問題。目安時間は 22 分前後。存在だけなら条件式を 4 で割れば見えるが、一意性では $1/s, 1/t, 1/u$ が条件式の中で動くことを使って係数比較する必要がある。体積では、 P が四面体の内部にあると誤解しやすいが、係数之和が $3/2$ なので平面 ABC の外側にあり、高さは O 側の高さの半分である。採点上は、基底の取り方、平面 LMN の式、一意性の係数比較、体積比の根拠を順に分けて書くと安定する。固定点の平面条件を複数の値で再検算し、平面 ABC からの高さの比が $1/2$ であることを確認した。

【第 5 問】

θ は実数とする。 xyz 空間の 2 点 $A\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $P\left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき、その交点を Q とする。 θ が $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め、その軌跡を xy 平面上に図示せよ。

【方針】

直線 AP 上の点を $A + \lambda(P - A)$ とおき、 $z = 0$ から λ を求める。与えられた範囲では $\cos \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ なので分母が負となり、 $\lambda < 0$ であることを必ず確認する。 $Q = (X, Y)$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ とおくと $R = -\lambda$ で、 $\cos \theta = -X/R$ が使える。これを λ の式に代入して $R = -1 - \sqrt{2}X$ を得て、平方して双曲線に直す。最後に $\theta = 0$ が範囲に含まれるため頂点は含まれること、 $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ は含まれないため枝は無限に近づくだけであることを確認する。

【解答】

直線 AP 上の点を $A + \lambda(P - A)$ と表す。この点の z 座標は

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \lambda \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

である。これが 0 になるとき

$$\lambda = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2 \cos \theta}$$

である。

いま $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ だから $\cos \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、 $\sqrt{2} - 2 \cos \theta < 0$ である。したがって $\lambda < 0$ である。

$Q = (X, Y)$ とおくと $X = \lambda \cos \theta$, $Y = \lambda \sin \theta$ である。さらに $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ とおくと、 $\lambda < 0$ より $R = -\lambda$ である。また $\cos \theta = \frac{X}{\lambda} = -\frac{X}{R}$ である。

λ の式を $\lambda(\sqrt{2} - 2 \cos \theta) = \sqrt{2}$ と書き、 $\lambda = -R$, $\cos \theta = -\frac{X}{R}$ を代入すると $(-R) \left(\sqrt{2} + \frac{2X}{R} \right) = \sqrt{2}$ すなわち $R = -1 - \sqrt{2}X$ を得る。左辺 R は正なので、特に $-1 - \sqrt{2}X > 0$ である。

両辺を平方すると $X^2 + Y^2 = (1 + \sqrt{2}X)^2$ であり、整理して $(X + \sqrt{2})^2 - Y^2 = 1$ となる。

範囲を確認する。 $\lambda < 0$ かつ $\cos \theta > 0$ なので $X = \lambda \cos \theta < 0$ である。また $|\sin \theta| < \cos \theta$ より $|Y| < -X$ である。双曲線 $(X + \sqrt{2})^2 - Y^2 = 1$ のうちこの条件を満たすのは左側の枝であり、頂点は $(-1 - \sqrt{2}, 0)$ である。実際、 $\theta = 0$ は許されるのでこの頂点は含まれる。一方、 $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ は範囲に含まれないので、枝は漸近線に近づくが端点としては持たない。

ここまでで、点 Q がこの左枝上にあることが分かった。逆に、この左枝上の任意の点 (X, Y) をとる。 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ とおくと、左枝では平方前の符号条件から

$$R = -1 - \sqrt{2}X > 0$$

である。 $\lambda = -R$ とし、

$$\cos \theta = -\frac{X}{R}, \quad \sin \theta = -\frac{Y}{R}$$

と定める。 $X^2 + Y^2 = R^2$ より、これはある実数 θ を定める。また $q = -X$ とおけば $q \geq 1 + \sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}q - 1$ であるから

$$\cos \theta = \frac{q}{R} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

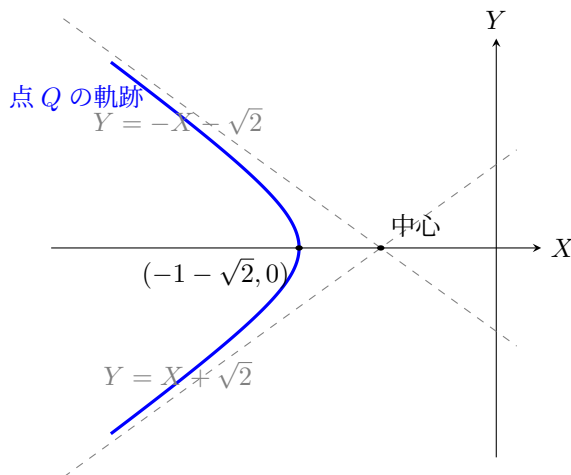
となり、 $-\pi/4 < \theta < \pi/4$ を満たすように θ を選べる。さらに

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2q/R} = -R = \lambda$$

である。よって $X = \lambda \cos\theta$, $Y = \lambda \sin\theta$ となり、この点実際は点 Q として得られる。したがって得られた左枝には余分な点がない。

したがって求める軌跡は $(X + \sqrt{2})^2 - Y^2 = 1$, $X \leq -1 - \sqrt{2}$ で表される左側の枝である。図示すると、中心 $(-\sqrt{2}, 0)$, 頂点 $(-1 - \sqrt{2}, 0)$, 漸近線 $Y = \pm(X + \sqrt{2})$ をもつ双曲線の左枝になる。

中心・頂点・漸近線を入れて図示すると次のようになる。実線で描いた左枝全体が軌跡である。



【総評】 公式の出題意図は、空間座標と2次曲線を題材に、軌跡を求める計算力と論証力を問うとしている。空間内の直線と xy 平面の交点を、平面上の軌跡として整理する問題。目安時間は20分前後。最も落としやすいのは $\lambda < 0$ の確認で、これを忘れると $\cos\theta$ と X/R の符号が逆になり、双曲線の枝を取り違える。 $\theta = 0$ は範囲内なので頂点 $(-1 - \sqrt{2}, 0)$ は含まれる一方、 $\pm\pi/4$ は含まれないため漸近線方向の端は含まれない。答案では方程式だけでなく、中心・頂点・漸近線・どちらの枝かを明記すると図示の得点が安定する。複数の θ を数値代入し、全点が双曲線の左枝上に乗ることと端の挙動を再確認した。

【第6問】

n は2以上の整数とする. 1枚の硬貨を続けて n 回投げる. このとき, k 回目 ($1 \leq k \leq n$) に表が出たら $X_k = 1$, 裏が出たら $X_k = 0$ として, $X_1, X_2, \dots, X_n$ を定める.

$$Y_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1}X_k$$

とするとき, Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ.

【方針】

Y_n の値そのものではなく偶奇だけを追う. n 回投げた列に最後の2回を追加すると考えると, 追加分による偶奇の変化は末尾 X_n と追加2回だけで決まる. 追加が 00, 01 のときは偶奇が変わらず, 10, 11 の2通りでは必ず片方だけが偶奇を反転させる. これにより状態を細かく列挙せずに $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$ を得る. 初期値は p_2, p_3 を直接数え, 偶数番目と奇数番目に分けて同じ漸化式を解く.

【解答】

n 回投げた後の列を一つ固定し, そのときの Y_n の偶奇を考える. この列の後ろに, さらに2回の結果を付け加える. 追加する2回を a, b と書くと, 新しく増える隣接積は $X_na + ab$ である.

追加が 00 または 01 のときは $a = 0$ なので $X_na + ab = 0$ であり, Y_n の偶奇は変わらない. この2通りは全体の確率 $\frac{1}{2}$ で起こる.

追加が 10 または 11 のときを見る. 10 では増加分は X_n , 11 では増加分は $X_n + 1$ である. X_n が 0, 1 のどちらであっても, X_n と $X_n + 1$ の偶奇は逆である. したがって, 10, 11 の2通りのうち一方だけが Y_n の偶奇を反転させ, もう一方は

偶奇を保つ。

よって、固定した最初の n 回の列に対して、後ろ 2 回の 4 通りを平均すると、00, 01 からの寄与は「もとの Y_n が奇数である確率」の半分、10, 11 からの寄与は常に $\frac{1}{4}$ である。したがって $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$ ($n \geq 2$) を得る。

初期値を求める。 $n = 2$ では $Y_2 = X_1X_2$ であり、奇数になるのは 11 のときだけなので $p_2 = \frac{1}{4}$ である。 $n = 3$ では $Y_3 = X_1X_2 + X_2X_3$ であり、奇数になる列は 011, 110 の 2 通りであるから $p_3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ である。

偶数の場合を $n = 2m$ 、奇数の場合を $n = 2m + 1$ と分ける。どちらの場合も $a_{m+1} = \frac{1}{2}a_m + \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{1}{4}$ を満たす。そこで $b_m = \frac{1}{2} - a_m$ とおくと $b_{m+1} = \frac{1}{2}b_m$, $b_1 = \frac{1}{4}$ であるから $b_m = \frac{1}{2^{m+1}}$ である。したがって $a_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}$ となる。

以上より、整数 $m \geq 1$ に対して、 $n = 2m$ または $n = 2m + 1$ のとき

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}$$

である。これが求める確率であり、偶数番目とその直後の奇数番目では同じ値をとる。

【総評】 公式の出題意図は、確率を題材に正しく推論し、それを的確に記述する力を問うとしている。隣り合う表表の個数の偶奇を追う確率問題。目安時間は 25 分前後。すべての状態を細かく書き出すと計算が膨らむため、最後に 2 回追加する見方で偶奇の変化だけを数えるのが要点である。採点上は、00, 01 では偶奇不変、10, 11 では片方だけ反転、という説明が漸化式 $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$ の根拠になる。初期値 p_3 で 111 を奇数と誤って数えないこと、最後に n を偶数と奇数に分け、同じ式で表すことも重要である。 $2 \leq n \leq 12$ の全列を独立列挙し、偶数・奇数の場合の確率式とすべて一致した。