

入 学 試 験 問 題

数 学



九 州 大 学 1982 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

整数を係数とする n 次の整式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (n > 1)$$

について、次の命題を証明せよ。

(1) 有理数 α が方程式 $f(x) = 0$ の解ならば、 α は整数である。

(2) ある自然数 $k > 1$ に対して、 k 個の整数

$$f(1), f(2), \dots, f(k)$$

のどれもが k で割り切れなければ、方程式 $f(x) = 0$ は有理数の解をもたない。

第 2 問

1 辺の長さ a の正方形 $ABCD$ を底面とし、頂点 P から底面の各頂点に至る辺がすべて長さ b の正四角すい $PABCD$ がある。2 辺 PB, PD の中点をそれぞれ L, N とする。3 点 A, L, N を通る平面が辺 PC と交わる点を M 、正方形 $ABCD$ の中心 O と頂点 P を結ぶ線分の中点を K とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM}$ を、それぞれ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) 四角形 $ALMN$ の面積 S を a, b で表せ。

第 3 問

定点 $P(p, 0)$ 、 $p > 0$ で x 軸に接する第 1 象限内の円 $C_1, C_2, \dots$ を次のように定める。円 C_1 は直線

$$\ell_1 : y = 2\sqrt{2}x$$

に接する。 ℓ_1 に平行で円 C_1 の中心 O_1 を通る直線を ℓ_2 とするとき、円 C_2 は ℓ_2 に接する。以下同様に、 ℓ_{n-1} に平行で O_{n-1} を通る直線を ℓ_n とし、円 C_n は ℓ_n に接する。次の問いに答えよ。

(1) 円 C_n の半径 r_n を求めよ。

(2) 円 C_n の面積を S_n とするとき、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

を求めよ。

第 4 問

$2, 3, \dots, k+1$ の k 個の値をとる確率変数 X の確率分布を

$$P(X = n) = \frac{a}{n^3 - n}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) a を定めよ。
- (2) X の期待値を求めよ。
- (3) $Y = 4X - \log k$ とするとき、 Y の期待値を最大にする自然数 k を求めよ。

第 5 問

$x \geq 0$ で定義された微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフ C は上に凸であり、 $f(0) \geq 0$ とする。 C 上に定点 $A(\alpha, f(\alpha))$ と点 $P(x, f(x))$ 、 $x > \alpha$ をとる。線分 OA, OP とグラフ C とで囲まれる部分の面積を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $S(x)$ を

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt$$

と $x, f(x), \alpha, f(\alpha)$ で表せ。

(2)

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a, b > 0)$$

の場合、 $x = a \sin \theta$ 、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ において、面積 S の θ に関する変化率を求めよ。

(3) $\alpha = 0$ のとき、 $S(x) = x^3 \log(x+1)$ となる $f(x)$ を、 $f(x) = xg(x)$ において求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)