

九州大学 1982 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

整数を係数とする n 次の整式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (n > 1)$$

について、次の命題を証明せよ。

- (1) 有理数 α が方程式 $f(x) = 0$ の解ならば、 α は整数である。
 (2) ある自然数 $k > 1$ に対して、 k 個の整数

$$f(1), f(2), \dots, f(k)$$

のどれもが k で割り切れなければ、方程式 $f(x) = 0$ は有理数の解をもたない。

▶ 解法 1 (一般次数で割り切りを追う)

【方針】

有理数解を既約分数で表し、方程式へ代入して分母の条件を調べる。(2) では整数解を k 個の剰余類の代表へ移す。

【解答】

- (1) $\alpha = m/r$ を既約分数とし、 $r > 0$ とする。 $f(\alpha) = 0$ に r^n を掛けると

$$m^n + a_1m^{n-1}r + \cdots + a_{n-1}mr^{n-1} + a_nr^n = 0.$$

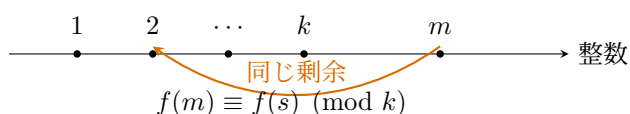
よって

$$m^n = -r(a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}mr^{n-2} + a_nr^{n-1}).$$

したがって $r \mid m^n$ である。 m, r は互いに素だから $r = 1$ であり、 α は整数である。

- (2) 有理数解が存在すると仮定すれば、(1) より整数解 m が存在する。 $m \equiv s \pmod{k}$ となる $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ を選ぶ。
 係数が整数なので

$$f(m) \equiv f(s) \pmod{k}.$$

 $f(m) = 0$ だから $k \mid f(s)$ となり、仮定に反する。ゆえに有理数解は存在しない。

▶ 解法 2 (素因数による背理法)

【方針】

既約分数の分母が 1 より大きいと仮定し、その素因数で方程式全体を調べる。(2) は整式の差の因数分解を使って仮定と矛盾させる。

【解答】

(1) $\alpha = m/r$ を既約分数とする。 $r > 1$ と仮定し、 r の素因数 q を取る。

$f(m/r) = 0$ に r^n を掛けた式では、最高次の m^n 以外の各項が r を因数にもつ。したがって $q \mid m^n$ 、ゆえに $q \mid m$ である。しかし $q \mid r$ でもあるから、 m/r が既約であることに反する。よって $r = 1$ である。

(2) 有理数解があるとすれば、(1) より整数解 m がある。 $m - s$ が k の倍数となる $s \in \{1, \dots, k\}$ を取る。

整数係数の整式について

$$f(m) - f(s) = (m - s)H$$

と書け、 H は整数である。よって $k \mid \{f(m) - f(s)\}$ である。 $f(m) = 0$ だから $k \mid f(s)$ となり、仮定に反する。したがって有理数解はない。

【総評】 難度 5、計算量 4、目安 24 分。文系の 3 次版を一般の n 次へ拡張した問題であり、次数が変わっても論理の核は同じである。既約分数の分母を直接割り切りで消す答案と、分母の素因数を選ぶ背理法を用意した。(2) も合同式と整式の差の因数分解の二方向から確認した。

【第 2 問】

1 辺の長さ a の正方形 $ABCD$ を底面とし、頂点 P から底面の各頂点に至る辺がすべて長さ b の正四角錐 $PABCD$ がある。2 辺 PB, PD の中点をそれぞれ L, N とする。3 点 A, L, N を通る平面が辺 PC と交わる点を M 、正方形 $ABCD$ の中心 O と頂点 P を結ぶ線分の中点を K とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM}$ を、それぞれ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) 四角形 $ALMN$ の面積 S を a, b で表せ。

▶ 解法 1 (空間ベクトルと対角線を使う)

【方針】

$\overrightarrow{AP}$ と底面の 2 辺を基底として、点 K, M の位置を係数比較で決める。面積は四角形の互いに垂直な対角線 AM, LN の長さから求める。

【解答】

(1) 次のようにおく。

$$\overrightarrow{AP} = \mathbf{p}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{e}_2.$$

このとき

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

K は OP の中点だから

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

M は辺 PC 上にあるので、ある実数 λ によって

$$\overrightarrow{AM} = (1 - \lambda)\mathbf{p} + \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

と書ける。一方、

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{e}_1), \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{e}_2).$$

点 M は平面 ALN 上にあるから

$$\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AL} + t\overrightarrow{AN}$$

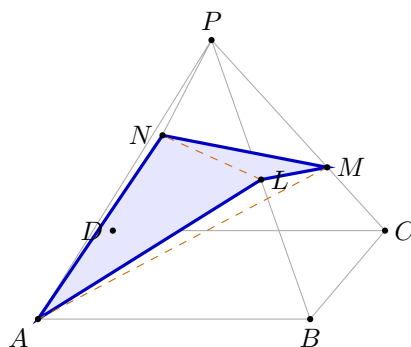
と表せる。 $\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の係数を比べると

$$\frac{s+t}{2} = 1 - \lambda, \quad \frac{s}{2} = \frac{t}{2} = \lambda.$$

よって $s = t = 2\lambda$ 、 $2\lambda = 1 - \lambda$ だから $\lambda = 1/3$ である。したがって

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

断面の位置関係は次のようになる。



(2) 正四角すいの対称性から

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{a^2}{2}.$$

また

$$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1).$$

これと $\overrightarrow{AM}$ の内積は 0 だから、対角線 AM, LN は垂直である。さらに

$$|LN| = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= \left| \frac{2}{3}\mathbf{p} + \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \right|^2 \\ &= \frac{2}{9}(2b^2 + 3a^2). \end{aligned}$$

垂直な対角線をもつ四角形の面積は対角線の積の半分だから

$$S = \frac{1}{2}|AM||LN| = \frac{a}{6}\sqrt{3a^2 + 2b^2}.$$

▶ 解法 2 (座標と断面の方程式を使う)

【方針】

底面を座標平面に置き、頂点の高さを h とする。平面 ALN の方程式と辺 PC の媒介表示から M を求め、垂直な対角線で断面積を計算する。

【解答】

(1) 座標を

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (a, 0, 0), \quad D = (0, a, 0), \quad C = (a, a, 0)$$

とし、

$$P = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h \right)$$

とおく。底面の中心は $O = (a/2, a/2, 0)$ だから

$$K = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right).$$

よって

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

中点は

$$L = \left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{h}{2} \right), \quad N = \left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{h}{2} \right).$$

3 点 A, L, N を通る平面は

$$z = \frac{h}{2a}(x + y)$$

である。辺 PC 上の点を

$$P + u(C - P) = \left(\frac{a}{2}(1 + u), \frac{a}{2}(1 + u), h(1 - u) \right)$$

と表して平面の式へ代入すると

$$h(1 - u) = \frac{h}{2}(1 + u).$$

よって $u = 1/3$ であり

$$M = \left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{2h}{3} \right).$$

したがって

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

(2) 対角線の長さは

$$|LN| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad |AM| = \frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + h^2},$$

また座標から $AM \perp LN$ が分かる。ゆえに

$$S = \frac{1}{2}|AM||LN| = \frac{a}{3\sqrt{2}}\sqrt{2a^2 + h^2}.$$

一方、 $PA = b$ より

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{2}.$$

これを代入して

$$S = \frac{a}{6}\sqrt{3a^2 + 2b^2}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7、目安 38 分。点 M が辺 PC と平面 ALN の双方に属する条件を、ベクトルの係数比較と座標平面の方程式の二通りで処理した。面積は断面の対角線 AM, LN が垂直であることを確認すると簡潔に求まる。外積や行列式を使わず、高校範囲の内積と座標計算だけで完結させた。

【第 3 問】

定点 $P(p, 0)$ 、 $p > 0$ で x 軸に接する第 1 象限内の円 $C_1, C_2, \dots$ を次のように定める。円 C_1 は直線

$$\ell_1 : y = 2\sqrt{2}x$$

に接する。 ℓ_1 に平行で円 C_1 の中心 O_1 を通る直線を ℓ_2 とするとき、円 C_2 は ℓ_2 に接する。以下同様に、 ℓ_{n-1} に平行で O_{n-1} を通る直線を ℓ_n とし、円 C_n は ℓ_n に接する。次の問いに答えよ。

- (1) 円 C_n の半径 r_n を求めよ。
- (2) 円 C_n の面積を S_n とするとき、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1 (点と直線の距離を使う)

【方針】

すべての中心を (p, r_n) と置く。最初の直線および各平行線までの距離が半径に等しいことから、初項と漸化式を求める。

【解答】

(1) 円 C_n の中心は

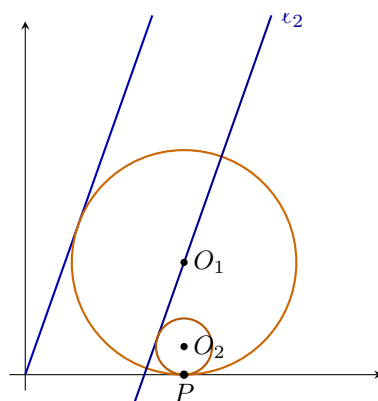
$$O_n = (p, r_n)$$

である。 O_1 から $2\sqrt{2}x - y = 0$ までの距離が r_1 だから

$$\frac{2\sqrt{2}p - r_1}{3} = r_1.$$

よって

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}p.$$



$n \geq 2$ とする。直線 ℓ_n は O_{n-1} を通るので

$$2\sqrt{2}(x - p) - (y - r_{n-1}) = 0.$$

O_n からこの直線までの距離が r_n だから

$$\frac{r_{n-1} - r_n}{3} = r_n.$$

したがって

$$r_n = \frac{1}{4}r_{n-1}.$$

ゆえに

$$r_n = \frac{\sqrt{2}p}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

(2)

$$S_n = \pi r_n^2 = \frac{\pi p^2}{2} \left(\frac{1}{16} \right)^{n-1}.$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi p^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\pi p^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{8\pi p^2}{15}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (直線の傾き角を使う)

【方針】

直線の傾き角を θ とし、 $\sin \theta, \cos \theta$ を求める。中心の鉛直方向の差を直線に垂直な方向へ射影して半径比を得る。

【解答】

(1) 直線 ℓ_1 と x 軸のなす角を θ とする。 $\tan \theta = 2\sqrt{2}$ だから

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos \theta = \frac{1}{3}.$$

中心 $O_1 = (p, r_1)$ の直線 ℓ_1 までの垂直距離は

$$p \sin \theta - r_1 \cos \theta.$$

これが r_1 に等しいので

$$r_1 = \frac{p \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} p.$$

次に、 O_{n-1} と O_n の鉛直方向の距離は $r_{n-1} - r_n$ である。これを ℓ_n に垂直な方向へ射影した長さが r_n だから

$$(r_{n-1} - r_n) \cos \theta = r_n.$$

$\cos \theta = 1/3$ を代入して

$$r_n = \frac{1}{4} r_{n-1}.$$

よって

$$r_n = \frac{\sqrt{2} p}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

(2) 面積比は半径比の 2 乗なので

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{16}, \quad S_1 = \frac{\pi p^2}{2}.$$

したがって無限等比級数の和は

$$S = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8\pi p^2}{15}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5、目安 28 分。すべての円が同じ点 P で x 軸に接するため、中心の x 座標は常に p である。距離公式による代数解法と、傾き角への射影による図形解法の双方から半径比 $1/4$ を得た。面積は公比 $1/16$ の無限等比級数になる。

【第 4 問】

$2, 3, \dots, k+1$ の k 個の値をとる確率変数 X の確率分布を

$$P(X = n) = \frac{a}{n^3 - n}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) a を定めよ。
- (2) X の期待値を求めよ。
- (3) $Y = 4X - \log k$ とするとき、 Y の期待値を最大にする自然数 k を求めよ。

▶ 解法 1 (部分分数と微分を使う)

【方針】

確率の総和と期待値に現れる和を、それぞれ部分分数分解して求める。(3) は期待値を実数変数の関数とみなし、微分して増減を調べる。

【解答】

(1)

$$\frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

したがって

$$\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}.$$

確率の総和が 1 であることから

$$a = \frac{4(k+1)(k+2)}{k(k+3)}.$$

(2)

$$E(X) = a \sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n^2 - 1},$$

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

よって

$$\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{k(3k+5)}{4(k+1)(k+2)}$$

であり

$$E(X) = \frac{3k+5}{k+3}.$$

(3)

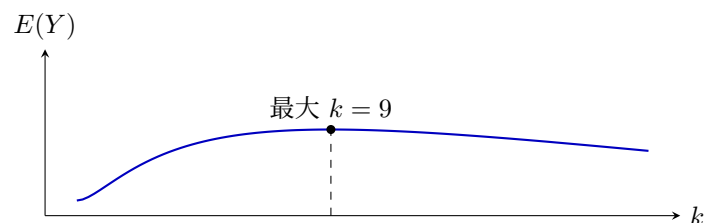
$$E(Y) = 4E(X) - \log k = 12 - \frac{16}{k+3} - \log k.$$

右辺を $F(k)$ とし、 $k > 0$ の実数で微分すると

$$F'(k) = \frac{16}{(k+3)^2} - \frac{1}{k} = -\frac{(k-1)(k-9)}{k(k+3)^2}.$$

したがって $1 < k < 9$ で増加し、 $k > 9$ で減少する。よって最大にする自然数は

$$k = 9.$$



▶ 解法 2 (望遠和と整数差分を使う)

【方針】

和を前後の項の差へ直して端の項だけを残す。(3) は隣り合う自然数での期待値の差をとり、対数を定積分として上下から評価する。

【解答】

(1) 恒等式

$$\frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right\}$$

を用いて和を取る。各分数をさらに前後の項の差に直して整理すると

$$\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}.$$

よって

$$a = \frac{4(k+1)(k+2)}{k(k+3)}.$$

(2) 期待値では

$$E(X) = a \sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{(n-1)(n+1)}.$$

前後 2 項の差として和を取り

$$E(X) = \frac{3k+5}{k+3}.$$

(3) $F(k) = E(Y)$ とおけば

$$F(k) = 12 - \frac{16}{k+3} - \log k$$

であり

$$F(k+1) - F(k) = \frac{16}{(k+3)(k+4)} - \log \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

ここで

$$\log \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}.$$

$1/x$ のグラフと中点・台形の関係から

$$\frac{2}{2k+1} < \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \frac{2k+1}{2k(k+1)}.$$

$2 \leq k \leq 7$ では

$$\log \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{k} < \frac{16}{(k+3)(k+4)}.$$

$k = 1, 8$ も上の台形評価を代入すれば差は正である。したがって $F(1) < F(2) < \dots < F(9)$ である。

一方、 $k \geq 9$ では

$$\log \left(1 + \frac{1}{k} \right) > \frac{2}{2k+1} > \frac{16}{(k+3)(k+4)}$$

だから $F(k+1) < F(k)$ である。よって最大にする自然数は

$$k = 9.$$

【総評】 難度 7、計算量 6、目安 35 分。確率の総和と期待値で分母が一つ変わるため、二つの部分分数分解を混同しないことが重要である。最大化は連続関数として微分する方法に加え、自然数上の差分を対数積分の中点・台形評価で判定する方法も示した。双方で $k = 9$ を独立に確認した。

【第 5 問】

$x \geq 0$ で定義された微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフ C は上に凸であり、 $f(0) \geq 0$ とする。 C 上に定点 $A(\alpha, f(\alpha))$ と点 $P(x, f(x))$ 、 $x > \alpha$ とする。線分 OA, OP とグラフ C とで囲まれる部分の面積を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $S(x)$ を

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt$$

と $x, f(x), \alpha, f(\alpha)$ で表せ。

(2)

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a, b > 0)$$

の場合、 $x = a \sin \theta$ 、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ において、面積 S の θ に関する変化率を求めよ。

(3) $\alpha = 0$ のとき、 $S(x) = x^3 \log(x+1)$ となる $f(x)$ を、 $f(x) = xg(x)$ とおいて求めよ。

▶ 解法 1 (面積公式を微分する)

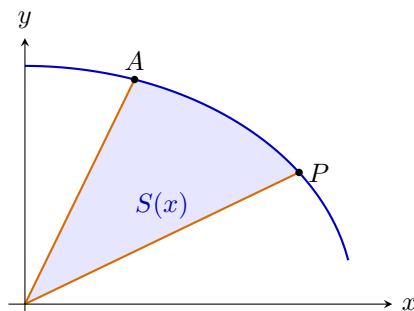
【方針】

曲線下の面積と 2 つの三角形から $S(x)$ を表す。(2) はその式を微分して合成関数の微分を行い、(3) は $f = xg$ と置いて g' を求める。

【解答】

(1) 区間 $[\alpha, x]$ の曲線下の面積に、線分 OA の下の三角形を加え、線分 OP の下の三角形を引く。したがって

$$S(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt - \frac{1}{2} \{xf(x) - \alpha f(\alpha)\}.$$



(2) (1) を x で微分すると

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} \{f(x) - xf'(x)\}.$$

与えられた関数では

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

だから

$$f(x) - xf'(x) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$x = a \sin \theta$ とおけば

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta.$$

よって

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{dx} \frac{dx}{d\theta} = \frac{ab}{2}.$$

(3) $\alpha = 0$ 、 $f(x) = xg(x)$ とおく。(1) の面積公式を微分すると

$$S'(x) = -\frac{1}{2}x^2 g'(x).$$

一方

$$S'(x) = 3x^2 \log(x+1) + \frac{x^3}{x+1}.$$

したがって

$$g'(x) = -6 \log(x+1) - \frac{2x}{x+1}.$$

積分すると

$$g(x) = C + 4x - (6x+4) \log(x+1),$$

ただし C は任意の実数である。よって

$$f(x) = x\{C + 4x - (6x+4) \log(x+1)\}.$$

この関数は $f(0) = 0$ である。また

$$f''(x) = -10 - 12 \log(x+1) + \frac{8}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

右辺は $x=0$ で 0、その導関数は $x \geq 0$ で負だから、 $x > 0$ で $f''(x) < 0$ となる。したがって元の「上に凸」の条件も満たす。

▶ 解法 2 (楕円の面積式と一次微分方程式を使う)

【方針】

(1) は境界の向きから面積を直接組み立てる。(2) は楕円弧の積分を実行すると、 θ に依存する部分が一次式になる。(3) は $(f/x)'$ を使って直接積分する。

【解答】

(1) 原点から A までの三角形、 A から P までの曲線下、原点から P までの三角形を符号付きで加えると

$$S(x) = \frac{1}{2}\alpha f(\alpha) + \int_{\alpha}^x f(t) dt - \frac{1}{2}xf(x).$$

これは解法 1 と同じ式である。

(2) $x = a \sin \theta$ とおくと

$$f(x) dx = \frac{b}{a}(a \cos \theta) a \cos \theta d\theta = ab \cos^2 \theta d\theta.$$

したがって曲線下の面積のうち x に依存する部分は

$$\frac{ab}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta)$$

である。一方

$$\frac{1}{2}xf(x) = \frac{ab}{2} \sin \theta \cos \theta.$$

ゆえに $S(x)$ のうち θ に依存する部分は

$$\frac{ab}{2}\theta$$

だけである。残りは α だけで決まる定数だから

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{ab}{2}.$$

(3) $\alpha = 0$ のとき、(1) を微分して

$$2S'(x) = f(x) - xf'(x).$$

したがって

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{2S'(x)}{x^2}.$$

$S(x) = x^3 \log(x+1)$ を代入すると

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -6 \log(x+1) - \frac{2x}{x+1}.$$

よって

$$\frac{f(x)}{x} = C + 4x - (6x+4) \log(x+1),$$

すなわち

$$f(x) = x\{C + 4x - (6x+4) \log(x+1)\}.$$

任意定数 C による項 Cx は直線 OP と曲線の面積差へ寄与しない。また C は 2 階微分にも影響せず、解法 1 で確認した上に凸の条件を保つ。

【総評】 難度 8、計算量 8、目安 42 分。面積を曲線下の積分と 2 つの三角形に分けることが出発点である。(2) は微分による短い解法と、楕円弧の積分で変数部分を直接消去する解法を示した。(3) では $f = xg$ と置く方法と $(f/x)'$ を使う方法を用意し、任意定数の意味と上に凸・ $f(0) \geq 0$ の条件まで検算した。