

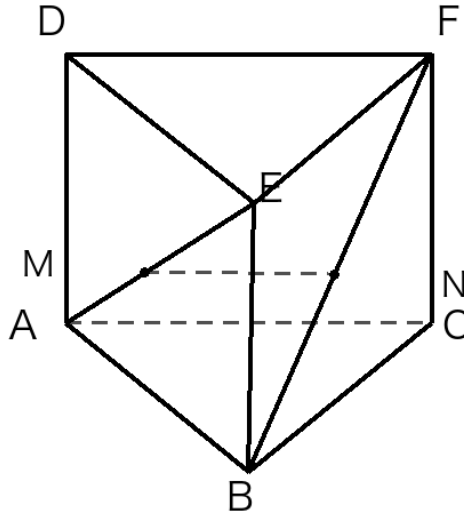
九州大学 1985 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

図のような立体 $ABCDEF$ がある。面 $ABED$ 、面 $BCFE$ 、面 $CADF$ は辺の長さが a の正方形であるとする。対角線 AE 、 BF 上にそれぞれ点 M 、 N をとったとき、線分 MN と辺 AB とは垂直で、 $MN = \frac{a}{\sqrt{3}}$ であった。そのとき、 M 、 N は AE 、 BF をそれぞれどのような比に分つか。



▶ 解法 1

【方針】

3 つの側面が正方形である立体を、正三角形 ABC を高さ方向に平行移動した三角柱として座標化する。 M を AE 上、 N を BF 上の比を表す文字 λ, μ で置く。 $MN \perp AB$ は x 成分の差が 0 であること、 $MN = a/\sqrt{3}$ は長さの 2 乗で表す。2 条件を連立し、得られた 2 つの解がどちらも線分上の点を与えることを確認して比に直す。

【解答】

正三角形 ABC を底面に持つ三角柱として座標を置く。すなわち

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (a, 0, 0), \quad C = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$$

とし、正方形のもう一方の方向を z 軸方向に取る。このとき

$$D = (0, 0, a), \quad E = (a, 0, a), \quad F = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, a\right)$$

である。

点 M が AE 上にあるので $M = A + \lambda(E - A) = (\lambda a, 0, \lambda a)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) と置く。また、点 N が BF 上にあるので

$$N = B + \mu(F - B) = \left(a - \frac{\mu a}{2}, \frac{\sqrt{3}\mu a}{2}, \mu a\right) \quad (0 \leq \mu \leq 1)$$

と置く。

辺 AB は x 軸方向である。したがって $MN \perp AB$ であるためには、 $\overrightarrow{MN}$ の x 成分が 0 であればよい。よって $a - \frac{\mu a}{2} - \lambda a = 0$ であり、 $\lambda = 1 - \frac{\mu}{2}$ を得る。

次に長さの条件を使う。上の関係を用いると、 $\overrightarrow{MN}$ の成分は

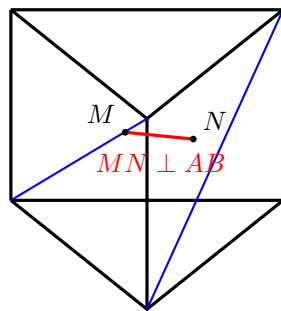
$$\overrightarrow{MN} = \left(0, \frac{\sqrt{3}\mu a}{2}, \mu a - \lambda a\right) = \left(0, \frac{\sqrt{3}\mu a}{2}, \frac{3\mu a}{2} - a\right)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} MN^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\mu a}{2} \right)^2 + \left(\frac{3\mu a}{2} - a \right)^2 \\ &= a^2 \left\{ \frac{3\mu^2}{4} + \left(\frac{3\mu}{2} - 1 \right)^2 \right\} \\ &= a^2(3\mu^2 - 3\mu + 1). \end{aligned}$$

条件 $MN = a/\sqrt{3}$ より $3\mu^2 - 3\mu + 1 = \frac{1}{3}$ である。よって $9\mu^2 - 9\mu + 2 = 0$ となり、 $(3\mu - 1)(3\mu - 2) = 0$ から $\mu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ である。 $\mu = \frac{1}{3}$ のとき $\lambda = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ であるから、 $AM : ME = 5 : 1$, $BN : NF = 1 : 2$ である。 $\mu = \frac{2}{3}$ のとき $\lambda = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であるから、 $AM : ME = 2 : 1$, $BN : NF = 2 : 1$ である。

したがって求める分け方は $AM : ME = 5 : 1, BN : NF = 1 : 2$ または $AM : ME = 2 : 1, BN : NF = 2 : 1$ である。



▶ 解法 2 (3 方向の内積だけで処理する)

【方針】

AB 方向、AC 方向、高さ方向の単位ベクトルを取り、 $AB \cdot AC$ のなす角が 60 度であることを使う。M, N を内分パラメータで表し、 AB との内積 0 と長さ条件を連立する。

【解答】

AB, AC, AD 方向の単位ベクトルを e, f, g とする。3 つの側面が正方形なので

$$e \cdot f = \frac{1}{2}, \quad e \cdot g = f \cdot g = 0.$$

$$M = A + \lambda(e + g)a, \quad N = B + \mu(-e + f + g)a$$

とおく。 $MN \perp AB$ から $\overrightarrow{MN} \cdot e = 0$ となり

$$\lambda = 1 - \frac{\mu}{2}.$$

これを $MN^2 = a^2/3$ に代入すると

$$3\mu^2 - 3\mu + 1 = \frac{1}{3},$$

すなわち

$$(3\mu - 1)(3\mu - 2) = 0.$$

よって $\mu = 1/3, 2/3$ である。対応する λ は $5/6, 2/3$ だから

$$(AM : ME, BN : NF) = (5 : 1, 1 : 2)$$

または

$$(AM : ME, BN : NF) = (2 : 1, 2 : 1)$$

である。

【総評】 難易度は 6、計算量は 6 程度である。想定時間は 25 分から 35 分程度。立体図形だが、3 つの正方形から三角柱として座標を置けることに気づけば標準的なベクトル計算になる。採点上は、点 M, N の置き方、垂直条件から $\lambda = 1 - \mu/2$ を得る部分、長さ条件から 2 次方程式を作る部分を省かないことが重要である。2 つの解はどちらも $0 \leq \mu \leq 1$ を満たすため、片方を捨てないように注意したい。最後は割合 λ, μ を線分比に直して答える。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・除外点・符号も確認した。

【第 2 問】

xy 平面における 2 つの曲線 $y = \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ について、次の (1), (2) に答えよ.

- (1) 上の 2 つの曲線の $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ での概形をかき、この 2 つの曲線が囲む部分を斜線で示せ.
 (2) (1) の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$u = \log x$ と置くと、区間 $1/e \leq x \leq e$ は $-1 \leq u \leq 1$ になり、2 曲線は $u^2 e^{-u/2}$ と $u e^{-u/2}$ になる。交点は $u = 0, 1$ で、囲まれる部分は $0 < u < 1$ にある。回転体の体積では $dx = e^u du$ となり、半径の 2 乗に含まれる e^{-u} と打ち消し合うため、積分は $u^2 - u^4$ の簡単な形に落ちる。

【解答】

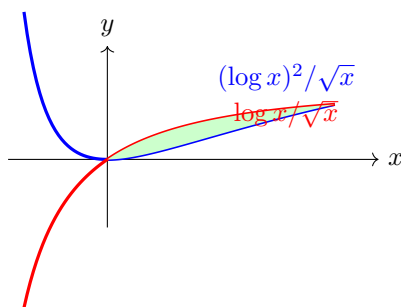
(1) $u = \log x$ と置く。 $1/e \leq x \leq e$ は $-1 \leq u \leq 1$ に対応する。また $x = e^u$ であるから、2 つの曲線は $y = u^2 e^{-u/2}$, $y = u e^{-u/2}$ となる。交点は $u^2 e^{-u/2} = u e^{-u/2}$ より $u^2 = u$ である。したがって $u = 0, 1$ であり、元の x では $x = 1, e$ である。 $-1 < u < 0$ では $u^2 > 0$, $u < 0$ なので 2 曲線は上下に離れるが、この区間だけでは 2 曲線が閉じた部分を作らない。 $0 < u < 1$ では $u > u^2$ であるから、上側は $y = u e^{-u/2}$ 、下側は $y = u^2 e^{-u/2}$ である。したがって、概形では $x = 1$ と $x = e$ の間で 2 曲線に囲まれる部分を斜線で示す。

(2) この斜線部分を x 軸のまわりに回転する。上側の半径は $u e^{-u/2}$ 、下側の半径は $u^2 e^{-u/2}$ である。また $dx = e^u du$ であるから、体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e \left\{ \left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} \right)^2 - \left(\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^1 \{ u^2 e^{-u} - u^4 e^{-u} \} e^u du \\ &= \pi \int_0^1 (u^2 - u^4) du. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$



▶ 解法 2 (断面積を因数分解してから置換する)

【方針】

$u = \log x$ とおき、2 曲線の差と回転断面積を因数分解する。指数因子が dx と消えることを先に見通し、区間 $0 \leq u \leq 1$ の多項式積分へ落とす。

【解答】

(1)

$u = \log x$ とおくと、2 曲線は

$$y_1 = u^2 e^{-u/2}, \quad y_2 = u e^{-u/2}$$

である。交点は $u = 0, 1$ 、すなわち $x = 1, e$ で、囲まれた部分では $0 < u < 1$ かつ $y_2 > y_1$ である。

(2)

回転断面積は

$$\begin{aligned} \pi(y_2^2 - y_1^2) &= \pi e^{-u}(u^2 - u^4) \\ &= \pi e^{-u} u^2 (1 - u^2). \end{aligned}$$

$dx = e^u du$ だから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 u^2 (1 - u^2) du \\ &= \pi \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

【総評】 難易度は 5、計算量は 5 程度である。想定時間は 18 分から 25 分程度。 $u = \log x$ と置くことがほぼ全てで、概形、交点、体積積分が同じ置換で整理される。斜線部分は $0 < u < 1$ 、すなわち $1 < x < e$ にあるので、 $-1 < u < 0$ の枝まで囲まれた部分と誤認しないことが大切である。体積では関数値を 2 乗してから引くため、 $u^2 e^{-u}$ と $u^4 e^{-u}$ になる。最後に $dx = e^u du$ を掛けることで指数部分が消えることを明記できれば、答案として十分に説得力がある。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・除外点・符号も確認した。

【第 3 問】

次の (1), (2) に答えよ。

- (1) 半径 1 の円 O の周上に相異なる 2 定点 A, B がある。その円周上に動点 P をとり、 a, b を $AP + PB = a$, $AP - PB = b$ によって定める。動点 P が円周上を動くとき、座標平面上の点 (a, b) の表す図形をかけ。また、 a が最大となるのは P がどの位置にあるときかを述べよ。
- (2) 円の周上に相異なる n 個の点がある。そのうちの任意にとった点を P_1 とし、そこから時計の針の回る方向に順次 $P_2, P_3, \dots, P_n$ とする。そのとき、 $P_1 P_2 + P_2 P_3 + \dots + P_{n-1} P_n + P_n P_1$ が最大となるのは $P_1, P_2, \dots, P_n$ がどのように配列されているときかを示し、証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) では固定弦 AB が中心で張る小さい方の角を 2α とし、 $u = AP, v = PB$ を $a = u + v, b = u - v$ に変換する。円周角の関係により、 $\angle APB$ は α または $\pi - \alpha$ となるので、余弦定理から 2 つのだ円の一部分が得られる。 a の最大は長い方の軸で決まる。(2) では隣り合う点の中心角を θ_i とし、周長を $2 \sum \sin(\theta_i/2)$ と表す。2 つの角を平均化すると和が増えることを用いて、全て等しいときが最大と示す。

【解答】

(1) 弦 AB が中心 O で張る小さい方の角を 2α とする。ただし $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ である。弦の長さは $AB = 2 \sin \alpha$ である。

$u = AP, v = PB$ と置くと、問題の座標は $a = u + v, b = u - v$ である。したがって $u = \frac{a+b}{2}, v = \frac{a-b}{2}$ である。実際の距離なので $a \geq |b|$ も必要である。

点 P が弦 AB の小さい弧上にない側にあるとき、円周角の定理より $\angle APB = \alpha$ である。余弦定理から $AB^2 =$

$u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha$ である。ここに $u = (a+b)/2$, $v = (a-b)/2$ を代入すると

$$4 \sin^2 \alpha = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{4} - 2 \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{4} \cos \alpha$$

である。整理して $(1 - \cos \alpha)a^2 + (1 + \cos \alpha)b^2 = 8 \sin^2 \alpha$ を得る。

一方、点 P が反対側の弧上にあるとき、 $\angle APB = \pi - \alpha$ である。このとき余弦定理の $\cos$ の部分の符号が変わるため、 $(1 + \cos \alpha)a^2 + (1 - \cos \alpha)b^2 = 8 \sin^2 \alpha$ を得る。

したがって、点 (a, b) の表す図形は $(1 - \cos \alpha)a^2 + (1 + \cos \alpha)b^2 = 8 \sin^2 \alpha$ および $(1 + \cos \alpha)a^2 + (1 - \cos \alpha)b^2 = 8 \sin^2 \alpha$ で表される 2 つのだ円のうち、条件 $a \geq |b|$ を満たす部分である。図では a 軸の正方向側にある 2 つのだ円弧として描く。 $a = AP + PB$ が最大となるのは、 a 軸方向の長さが大きい方のだ円で、かつ $b = 0$ の点である。上の 2 式のうち $(1 - \cos \alpha)a^2 + (1 + \cos \alpha)b^2 = 8 \sin^2 \alpha$ の方が a 軸方向に長い。 $b = 0$ とすると

$$a^2 = \frac{8 \sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{8(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} = 8(1 + \cos \alpha)$$

であるから、 $a = 4 \cos \frac{\alpha}{2}$ となる。このとき $AP = PB$ なので、 P は AB の垂直二等分線上、すなわち大きい弧の中点にある。

(2) 円の半径を r とする。隣り合う点 P_i, P_{i+1} が中心で張る角を θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とする。ただし $P_{n+1} = P_1$ と見る。このとき $\theta_i > 0$, $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 2\pi$ であり、弦の長さは $P_i P_{i+1} = 2r \sin \frac{\theta_i}{2}$ である。したがって周長は

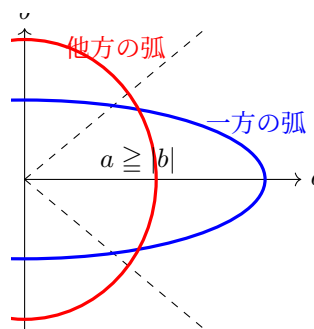
$$L = 2r \sum_{i=1}^n \sin \frac{\theta_i}{2} \text{ である。}$$

2 つの正の角 u, v を、和を保ったまま平均 $(u+v)/2, (u+v)/2$ に置き換えることを考える。このとき

$$\sin \frac{u}{2} + \sin \frac{v}{2} = 2 \sin \frac{u+v}{4} \cos \frac{u-v}{4} \leq 2 \sin \frac{u+v}{4}$$

であり、右辺は平均後の $\sin \frac{u+v}{4} + \sin \frac{u+v}{4}$ に等しい。等号は $u = v$ のときに限る。

したがって、2 つの中心角が等しくないなら、それらを平均化することで周長を大きくできる。周長が最大であるためには、すべての中心角が等しくなければならない。よって $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \frac{2\pi}{n}$ であり、点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ は円周上に等間隔に並ぶ。すなわち、正 n 角形の頂点として配列されているときに最大となる。



▶ 解法 2 (三角関数で円周上を媒介する)

【方針】

A, B を偏角 $\pm \alpha$ に置き、P の偏角を ϕ とする。弦長を半角の正弦で表して $a = AP + PB$ 、 $b = AP - PB$ の関係を消去する。
(2) は中心角の正弦和を平均化する。

【解答】

(1)

(1) 半径 1 の円で A, B の偏角を $-\alpha, \alpha$ とする。P が一方の弧上を動くとき、弦長公式

$$AP = 2 \left| \sin \frac{\phi + \alpha}{2} \right|, \quad PB = 2 \left| \sin \frac{\phi - \alpha}{2} \right|$$

を用いる。和積公式で $a = AP + PB$ 、 $b = AP - PB$ から ϕ を消去すると

$$(1 - \cos \alpha)a^2 + (1 + \cos \alpha)b^2 = 8 \sin^2 \alpha$$

を得る。反対の弧では係数が入れ替わる。実際の距離条件 $a \geq |b|$ を加えた 2 つのだ円弧が軌跡である。

a が最大になるのは $b = 0$ 、すなわち $AP = PB$ のときで、P は大きい弧の中点にある。最大値は $4 \cos(\alpha/2)$ である。

(2) 隣接点間の中心角を $\theta_i > 0$ とすれば $\sum \theta_i = 2\pi$ 、周長は

$$2r \sum_{i=1}^n \sin \frac{\theta_i}{2}.$$

2 角をその平均で置き換えると正弦和は増加し、等号は 2 角が等しいときだけである。よって最大時には

$$\theta_1 = \cdots = \theta_n = \frac{2\pi}{n}.$$

したがって点は正 n 角形の頂点として等間隔に並ぶ。

【総評】 難易度は 8、計算量は 7 程度である。想定時間は 35 分から 45 分程度。(1) は変数名 a, b が問題で与えられているため、距離を u, v と置き直してから (a, b) に戻すと混乱しにくい。2 つの弧で円周角が α と $\pi - \alpha$ に分かれるため、だ円が 2 本出る点が重要である。(2) は正多角形が答えだと予想しやすいが、証明では中心角を導入し、2 つずつ平均化する不等式を書く必要がある。ありがちなミスは、最大値だけ述べて等間隔でなければならない理由を示さないことである。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・除外点・符号も確認した。

■ 第 4 問

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定義される 1 次変換を f とする。ある点 $P_0 = (x_0, y_0)$ をとり、 $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって順次 $\{P_n\}$ を定義する。そのとき、点列 $\{P_n\}$ はある直線 m 上に P_0 より順次一定間隔 l (> 0) で並んだという。次の (1), (2) に答えよ。ただし、 α は直線 m と x 軸の正の方向とのなす角とする。

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を x_0, y_0, l および α を用いて表せ。

(2) P_0 以外の点 $Q_0 = (u_0, v_0)$ に対して、 $Q_{n+1} = f(Q_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって定義される点列 $\{Q_n\}$ はどのように並んでいるか。

▶ 解法 1

【方針】

$P_n = P_0 + nle$ から $Ae = e$ 、 $AP_0 = P_0 + le$ を得て行列を決め、任意の Q_0 を P_0, e で分解する。

【解答】

(1) 直線 m の方向ベクトルを $e = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ と置く。条件より、点列 P_n は $P_n = P_0 + nle$ と表せる。したがって、行列を A と書くと $Ae = e$ 、 $AP_0 = P_0 + le$ を満たす。

ここで $P_0 = (x_0, y_0)$ とする。もし P_0 と e が平行なら、 P_0 は直線 m と原点を結ぶ方向にあり、1 次変換で P_0 が同じ直線上を等間隔に進むためには e 方向の伸びが必要になる。しかし $Ae = e$ と両立すると $l = 0$ になってしまう。条件では $l > 0$ なので、 P_0 と e は平行でない。よって $\Delta = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha$ は 0 でない。

行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

について、 $Ae = e$ から

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \sin \alpha = \cos \alpha, \\ c \cos \alpha + d \sin \alpha = \sin \alpha \end{cases}$$

を得る。また $AP_0 = P_0 + le$ から

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = x_0 + l \cos \alpha, \\ cx_0 + dy_0 = y_0 + l \sin \alpha \end{cases}$$

を得る。これらを解くと

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l \sin \alpha \cos \alpha}{\Delta} & -\frac{l \cos^2 \alpha}{\Delta} \\ \frac{l \sin^2 \alpha}{\Delta} & 1 - \frac{l \sin \alpha \cos \alpha}{\Delta} \end{pmatrix}$$

である。

実際、第 1 列と第 2 列を用いて計算すれば $Ae = e$ となり、さらに $AP_0 = P_0 + le$ となることが確認できる。

(2) 任意の点 $Q_0 = (u_0, v_0)$ を、 P_0 と e を用いて $Q_0 = \lambda P_0 + \mu e$ と表す。 P_0, e は平行でないので、この表し方は一意である。両辺の x, y 成分から、特に $\lambda = \frac{u_0 \sin \alpha - v_0 \cos \alpha}{\Delta}$ である。 $Ae = e$ 、 $AP_0 = P_0 + le$ を使うと

$$\begin{aligned} Q_1 &= AQ_0 \\ &= \lambda AP_0 + \mu Ae \\ &= \lambda(P_0 + le) + \mu e \\ &= \lambda P_0 + (\mu + \lambda l)e. \end{aligned}$$

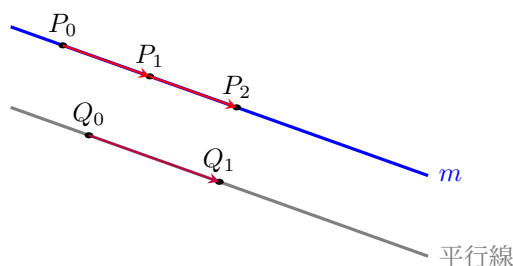
同じ計算を繰り返すと $Q_n = \lambda P_0 + (\mu + n\lambda l)e$ である。

したがって、 $\lambda \neq 0$ のとき、点列 Q_n は直線 m に平行な直線上に、一定間隔 $|\lambda|l$ で並ぶ。進む向きは、 $\lambda > 0$ なら m と同じ向き、 $\lambda < 0$ なら反対向きである。 $\lambda = 0$ のときは $Q_n = \mu e$ で全て同じ点になる。すなわち、 Q_0 が原点を通り m に平行な直線上にある場合、点列 Q_n は動かない。

以上より、

$$\lambda = \frac{u_0 \sin \alpha - v_0 \cos \alpha}{x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha}$$

とすると、 $\lambda \neq 0$ では Q_n は m に平行な直線上に間隔 $|\lambda|l$ で並び、 $\lambda = 0$ では一点にとどまる。



▶ 解法 2 (各点の直線からの符号付き距離を見る)

【方針】

m 方向の単位ベクトル e と、それに垂直な n を使う。変換は e を固定し、 P_0 だけを le だけ進める。任意の Q_0 の n 成分が進行間隔を決めることを直接読む。

【解答】

(1)

$e = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $n = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ とおき

$$\Delta = P_0 \cdot n = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha.$$

$l > 0$ だから $\Delta \neq 0$ である。条件は

$$Ae = e, \quad AP_0 = P_0 + le$$

である。任意のベクトル X を $X = \lambda P_0 + \mu e$ と表すと

$$AX = X + \lambda le, \quad \lambda = \frac{X \cdot n}{\Delta}.$$

これを座標に戻せば

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l \sin \alpha \cos \alpha}{\Delta} & -\frac{l \cos^2 \alpha}{\Delta} \\ \frac{l \sin^2 \alpha}{\Delta} & 1 - \frac{l \sin \alpha \cos \alpha}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

(2)

$Q_0 = (u_0, v_0)$ に対し

$$\lambda = \frac{u_0 \sin \alpha - v_0 \cos \alpha}{\Delta}$$

とおくと

$$Q_n = Q_0 + n\lambda e.$$

したがって $\lambda \neq 0$ なら m に平行な直線上を間隔 $|\lambda|l$ で進み、 $\lambda = 0$ なら同一点にとどまる。

【総評】 難易度は 8、計算量は 8 程度である。想定時間は 35 分から 45 分程度。行列を 4 成分から直接求めるより、 e と P_0 に対する作用を先に決めるのが見通しのよい解法である。 $\Delta = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha \neq 0$ を確認しないと、連立方程式を割る根拠が弱くなるので注意したい。(2) は Q_0 を P_0, e で分解するだけで、点列の進み方が一行で読める。採点では、 λ の符号による向き、 $\lambda = 0$ の停止する場合まで書くと十分である。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・除外点・符号も確認した。

【第 5 問】

A, B 2 つのつぼがある。 A には白球 a 個、赤球 b 個が、 B には白球 b 個、赤球 a 個が入っている ($a > 0, b > 0$)。まず、 A より、無作為に球を取り出す。取り出した後、ただちにもとに戻す。白球が取り出されたときは、次に A より球を取り出し、赤球が取り出されたときは、次に B より球を取り出すとする。以下このようにして、球を取り出して戻すことを続けたとき、 n 回目に取り出した球が白球である確率を p_n 、赤球である確率を q_n で表す。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

- (1) $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき、行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を求めよ。
 (2) p_n を求め、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

直前に白球が出たら次はつぼ A 、赤球が出たら次はつぼ B から取り出すので、 (p_n, q_n) の漸化式を条件付き確率で立てる。行列は各つぼで白・赤が出る確率をそのまま並べればよい。(2) では $p_n + q_n = 1$ が常に成り立つことと、差 $p_n - q_n$ が一定比で変化することを使う。和と差から p_n を復元し、 $|(a-b)/(a+b)| < 1$ により極限を求める。

【解答】

(1) n 回目に白球が出たとき、 $n+1$ 回目はつぼ A から取り出す。つぼ A で白球が出る確率は $a/(a+b)$ 、赤球が出る確率は $b/(a+b)$ である。

また、 n 回目に赤球が出たとき、 $n+1$ 回目はつぼ B から取り出す。つぼ B で白球が出る確率は $b/(a+b)$ 、赤球が出る確率は $a/(a+b)$ である。

したがって $p_{n+1} = \frac{a}{a+b}p_n + \frac{b}{a+b}q_n$ および $q_{n+1} = \frac{b}{a+b}p_n + \frac{a}{a+b}q_n$ である。よって

$$A = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

である。

(2) 最初はつぼ A から取り出すので $p_1 = \frac{a}{a+b}$, $q_1 = \frac{b}{a+b}$ である。また常に $p_n + q_n = 1$ である。

次に差を取ると、(1) の漸化式より

$$\begin{aligned} p_{n+1} - q_{n+1} &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} \right) p_n + \left(\frac{b}{a+b} - \frac{a}{a+b} \right) q_n \\ &= \frac{a-b}{a+b} (p_n - q_n). \end{aligned}$$

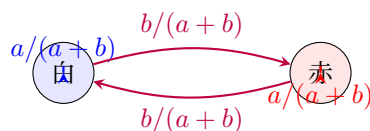
さらに $p_1 - q_1 = \frac{a-b}{a+b}$ であるから、 $p_n - q_n = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n$ である。

和と差を用いて $2p_n = (p_n + q_n) + (p_n - q_n)$ だから、

$$p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n \right\}$$

である。

ここで $a > 0, b > 0$ より $\left| \frac{a-b}{a+b} \right| < 1$ である。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n = 0$ となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$ である。



前回の色が次のつぼを決める

▶ 解法 2 (白の確率だけの漸化式にする)

【方針】

$q_n = 1 - p_n$ を用いて一次漸化式へ落とす。定常値 $1/2$ との差を取れば等比数列になり、一般項と極限が直ちに出る。

【解答】

(1)

条件付き確率から

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

これが求める行列である。

(2)

$q_n = 1 - p_n$ を代入すると

$$p_{n+1} = \frac{b}{a+b} + \frac{a-b}{a+b} p_n.$$

定常値 $1/2$ を引けば

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{a-b}{a+b} \left(p_n - \frac{1}{2} \right).$$

$p_1 = a/(a+b)$ だから

$$p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n \right\}.$$

$a, b > 0$ より比の絶対値は 1 未満なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

【総評】 難易度は 6、計算量は 6 程度である。想定時間は 22 分から 30 分程度。条件付き確率の標準問題で、直前の色が次に選ぶつぼを決める点を式に正しく写せるかが勝負である。行列を求めた後は、成分をそのまま何度も掛けるより、和 $p_n + q_n$ と差 $p_n - q_n$ に分けると一般項が短く出る。 $a, b > 0$ なので比の絶対値が 1 未満であることを最後に確認し、極限 $1/2$ まで書き切りたい。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・除外点・符号も確認した。

【第 6 問】

次の (1), (2) に答えよ。

(1) $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ とするとき、座標平面上の点 $P = \left(\tan t, \frac{\tan 3t}{\tan 2t} \right)$ のグラフをかけ。ここで $\frac{\tan 3t}{\tan 2t}$ の $t = 0$ での値は $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 3t}{\tan 2t}$ とする。

(2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とする。実数 a に対して $a = \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$ を満たす x の個数を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$X = \tan t$, $z = X^2$ と置いて有理式 $F(z)$ に直し、除外点を保った増減・値域から解数を数える。

【解答】

(1) $X = \tan t$ と置く。 $-\pi/2 < t < \pi/2$ であるから、 X はすべての実数を 1 回ずつ動く。また $\tan 2t = \frac{2X}{1-X^2}$, $\tan 3t = \frac{3X-X^3}{1-3X^2}$ である。したがって $X \neq 0$ では

$$Y = \frac{\tan 3t}{\tan 2t} = \frac{3X-X^3}{1-3X^2} \cdot \frac{1-X^2}{2X} = \frac{(3-X^2)(1-X^2)}{2(1-3X^2)}.$$

右辺は X^2 だけで決まるので、グラフは y 軸対称である。 $t = 0$ では問題の指定により極限値を取る。上の式で $X \rightarrow 0$ とすれば $Y \rightarrow \frac{3}{2}$ であるから、点 $(0, 3/2)$ を通る。

次に特徴を調べる。分母が 0 になるのは $1 - 3X^2 = 0$ すなわち $X = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。ここでは分子が 0 でないので、縦の漸近線である。

また $X = \pm 1$ では $\tan 2t$ が定義されないため、元の点は存在しない。ただし有理式の極限は $Y = 0$ であるから、 $(1, 0)$ 、 $(-1, 0)$ は穴として描く。零点は分子より $X = \pm\sqrt{3}$ である。以上を用いて、 y 軸対称、漸近線 $X = \pm 1/\sqrt{3}$ 、穴 $(\pm 1, 0)$ 、零点 $(\pm\sqrt{3}, 0)$ 、切片 $(0, 3/2)$ を持つグラフを描けばよい。

(2) $z = \tan^2 x$ と置く。 $-\pi/2 < x < \pi/2$ では $z \geq 0$ であり、 $z = 0$ は $x = 0$ だけに対応し、 $z > 0$ は x と $-x$ の 2 個に対応する。

(1) より $F(z) = \frac{(3-z)(1-z)}{2(1-3z)}$ と置けば、方程式は $a = F(z)$ である。ただし $z \neq \frac{1}{3}$, $z \neq 1$ に注意する。前者は分母が 0 になる点、後者は $\tan 2x$ が定義されない点である。

増減を調べる。計算すると $F'(z) = -\frac{(z+1)(3z-5)}{2(3z-1)^2}$ である。したがって $z \geq 0$ では、 $0 \leq z < 5/3$ で増加し、 $z > 5/3$ で減少する。ただし $z = 1/3$ 、 $z = 1$ で区間を分ける必要がある。

各区間の値を整理する。 $F(0) = \frac{3}{2}$ であり、 $z \rightarrow 1/3 - 0$ で $F(z) \rightarrow +\infty$ である。よって $0 \leq z < \frac{1}{3}$ の値域は $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ である。

次に $\frac{1}{3} < z < 1$ では、 $z \rightarrow 1/3 + 0$ で $F(z) \rightarrow -\infty$ 、 $z \rightarrow 1 - 0$ で $F(z) \rightarrow 0$ である。ただし $z = 1$ は含まないので、値域は $(-\infty, 0)$ である。

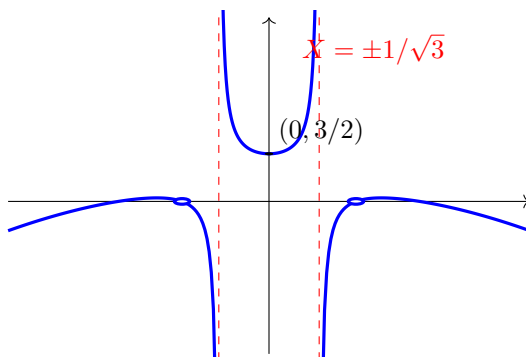
さらに $z > 1$ を考える。 $z \rightarrow 1 + 0$ で $F(z) \rightarrow 0$ 、 $z = 5/3$ で最大となり、 $F\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{9}$ である。また $z = 3$ で $F(z) = 0$ 、 $z \rightarrow \infty$ で $F(z) \rightarrow -\infty$ である。したがってこの区間からは、 $0 < a < 1/9$ で 2 個の z 、 $a = 1/9$ で 1 個の z 、 $a = 0$ で 1 個の z 、 $a < 0$ で 1 個の z が得られる。

これらを x の個数に直す。 $z = 0$ は $x = 0$ の 1 個、 $z > 0$ は 2 個の x を与える。

以上より、求める個数は

条件	解の個数
$a < 0$	4
$a = 0$	2
$0 < a < \frac{1}{9}$	4
$a = \frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{9} < a < \frac{3}{2}$	0
$a = \frac{3}{2}$	1
$a > \frac{3}{2}$	2

である。



▶ 解法 2 (z の二次方程式で解数を数える)

【方針】

$X = \tan x$, $z = X^2$ と置く。 $a = F(z)$ を二次方程式へ直し、判別式・根の和・積から非負根の個数を数える。 $z = 0$ だけ x が 1 個、正根は $\pm x$ の 2 個に対応する。

【解答】

(1)

(1) $X = \tan t$ とおくと

$$Y = \frac{(3 - X^2)(1 - X^2)}{2(1 - 3X^2)}.$$

したがってグラフは y 軸対称で、 $X = \pm 1/\sqrt{3}$ が縦の漸近線、 $(\pm 1, 0)$ は穴、 $(\pm \sqrt{3}, 0)$ は零点、 $(0, 3/2)$ は通る点である。

(2) $z = \tan^2 x \geq 0$ とすると、 $a = F(z)$ は

$$z^2 + (6a - 4)z + 3 - 2a = 0$$

と同値で、判別式は

$$4(9a - 1)(a - 1)$$

である。ただし $z = 1$ は元の式で除外され、 $z = 1/3$ は漸近点である。

根の和 $4 - 6a$ 、積 $3 - 2a$ も用いると、非負根の個数は次のようになる。正根 1 個は x を 2 個、正根 2 個は 4 個、 $z = 0$ は $x = 0$ の 1 個を与える。

a の範囲	x の個数
$a < 0$	4
$a = 0$	2
$0 < a < 1/9$	4
$a = 1/9$	2
$1/9 < a < 3/2$	0
$a = 3/2$	1
$a > 3/2$	2

これは増減表による数え上げとも一致する。

【総評】 難易度は 8、計算量は 8 程度である。想定時間は 35 分から 45 分程度。(1) は $X = \tan t$ による有理式化が出発点で、漸近線、穴、零点を区別して描くことが重要である。特に $X = \pm 1$ は有理式では値が 0 に近づくが、元の $\tan 2t$ が定義されないため穴になる。(2) では $z = \tan^2 x$ とした後、 $z = 0$ だけ解が 1 個、 $z > 0$ は解が 2 個という対応を最後まで忘れないこと。境界 $a = 0, 1/9, 3/2$ で個数が変わるので、増減表と値域を分けて答案に残すと安全である。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・除外点・符号も確認した。