

九州大学 1991 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

1 辺の長さ x の正方形 $ABCD$ の中心を O とし、 O を通りこの正方形に垂直な直線上に頂点 E をもつ四角錐 $ABCDE$ を考える。

- (1) 半径 1 の球がこの四角錐に内接しているとき、高さ $\overline{EO}$ を x で表せ。
 (2) (1) の四角錐の体積が最小となる x の値とその最小値を求めよ。

▶ 解法 1：体積と表面積から内接球半径を使う

【方針】

四角錐の高さを $h = EO$ ，側面三角形の斜高を l と置く。内接球の半径 1 は、体積 V と表面積 S について $V = S/3$ と同じ意味なので、 $1 = 3V/S$ を使う。 $l^2 = h^2 + (x/2)^2$ と合わせて h を解くと $h = 2x^2/(x^2 - 4)$ が出る。(2) は $V = x^2h/3$ を x の関数として微分し、定義域 $x > 2$ で増減を調べる。

【解答】

(1) 四角錐の高さを $h = EO$ とおく。また、側面三角形の斜高を l とする。正方形の中心から一辺までの距離は $x/2$ なので $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ である。

四角錐の体積は $V = \frac{1}{3}x^2h$ である。表面積は、底面積 x^2 と、4 枚の側面三角形の面積の和で $S = x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}xl = x^2 + 2xl$ である。

内接球の半径が 1 であるから、四角錐は底面と側面を底面にもつ高さ 1 の小さな三角錐に分けられ、 $V = \frac{1}{3}S$ となる。すなわち $\frac{1}{3}x^2h = \frac{1}{3}(x^2 + 2xl)$ であり、 $x^2h = x^2 + 2xl$ である。 $x > 0$ より $xh = x + 2l$ となる。したがって $l = \frac{x(h-1)}{2}$ である。

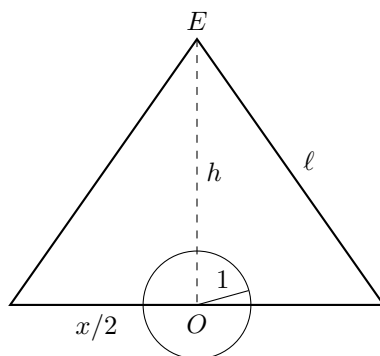
これを $l^2 = h^2 + (x/2)^2$ に代入すると $\frac{x^2(h-1)^2}{4} = h^2 + \frac{x^2}{4}$ である。両辺を 4 倍して整理すると $x^2(h^2 - 2h + 1) = 4h^2 + x^2$ より $(x^2 - 4)h^2 - 2x^2h = 0$ である。 $h > 0$ なので $h = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ を得る。この式が正になるために $x > 2$ である。

(2) (1) より体積は $V(x) = \frac{1}{3}x^2h = \frac{2x^4}{3(x^2 - 4)}$ ($x > 2$) である。微分すると $V'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 8)}{3(x^2 - 4)^2}$ である。 $x > 2$ では分母と $4x^3$ は正なので、 $V'(x)$ の符号は $x^2 - 8$ の符号で決まる。したがって $2 < x < 2\sqrt{2}$ で $V'(x) < 0$ ， $x > 2\sqrt{2}$ で $V'(x) > 0$ である。よって体積は $x = 2\sqrt{2}$ で最小となる。

そのとき

$$V = \frac{2(2\sqrt{2})^4}{3\{(2\sqrt{2})^2 - 4\}} = \frac{2 \cdot 64}{3 \cdot 4} = \frac{32}{3}$$

である。したがって $x = 2\sqrt{2}$ ， $V_{\min} = \frac{32}{3}$ である。



▶ 解法 2：軸を含む断面と相加相乗平均を使う

【方針】

頂点と底面の対辺の中点を通る軸断面を取ると、底辺 x 、高さ h 、斜辺 ℓ の二等辺三角形ができ、その内接円の半径も 1 である。三角形の面積を内接円で分割して h を求める。体積は $u = x^2 - 4$ と置き、相加相乗平均で微分せずに最小化する。

【解答】

(1) $h = EO$ とし、底面の向かい合う 2 辺の中点と E を通る断面を考える。この断面は底辺 x 、高さ h 、等しい 2 辺

$$\ell = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}$$

の二等辺三角形であり、半径 1 の内接円をもつ。

三角形の面積を、内心を頂点とする 3 個の三角形に分けると

$$\frac{xh}{2} = \frac{x + 2\ell}{2}.$$

よって

$$xh = x + 2\ell.$$

$$\ell = \frac{x(h-1)}{2}$$

を $\ell^2 = h^2 + x^2/4$ に代入すると

$$(x^2 - 4)h^2 - 2x^2h = 0.$$

$h > 0$ であるから

$$h = \frac{2x^2}{x^2 - 4}, \quad x > 2.$$

(2)

$$V = \frac{x^2h}{3} = \frac{2x^4}{3(x^2 - 4)}.$$

$$u = x^2 - 4 > 0$$

とおけば

$$V = \frac{2}{3} \frac{(u+4)^2}{u} = \frac{2}{3} \left(u + 8 + \frac{16}{u} \right).$$

相加相乗平均より

$$u + \frac{16}{u} \geq 8$$

であり、等号は $u = 4$ のときに成り立つ。したがって

$$x = 2\sqrt{2}, \quad V_{\min} = \frac{32}{3}.$$

【総評】 内接球をもつ四角錐の体積最小問題で、目安時間は 30 分。内接球半径を使う公式 $V = rS/3$ を、半径 1 の場合として使えるかが最初の山である。側面の斜高 l を導入し、 $xh = x + 2l$ と $l^2 = h^2 + (x/2)^2$ を連立して高さを出す。定義域 $x > 2$ を確認したうえで微分の符号を調べれば、最小値は一意に決まる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 2 問】

直線 L は、 L 上の異なる k 個 ($k \geq 1$) の点によって $P_1(k) = k - 1$ 個の長さが有限な部分と 2 個の長さが有限でない部分に分かれる。平面 H 上に k 本の直線が、どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も 1 点で交わらないように与えられている。 H はこれらの直線によって $P_2(k)$ 個の大きさが有限な部分と何個かの大きさが有限でない部分に分かれるとする。このとき次の間に答えよ。

- (1) $P_2(4)$, $P_2(5)$ を求めよ。
- (2) $P_2(k)$ と $P_2(k+1)$ の関係式を求めよ。
- (3) $P_2(k)$ を k で表せ。

▶ 解法 1：直線を 1 本ずつ追加する

【方針】

直線を 1 本追加したときに何が増えるかを見る。すでに k 本ある平面に新しい直線を加えると、新しい直線は既存の直線と k 個の交点を持ち、その上に $k - 1$ 個の有限な線分ができる。この有限な線分がそれぞれ一つずつ有限な部分を新しく作るので、 $P_2(k+1) = P_2(k) + k - 1$ となる。初期値から和を取って一般式を出す。

【解答】

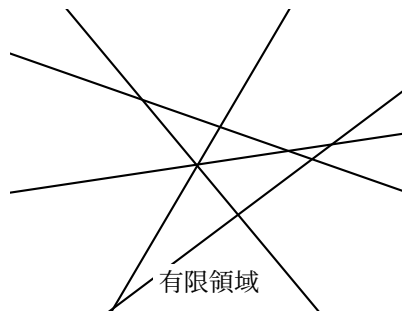
(1) 4 本の直線が一般の位置にあるとき、有限な部分は三角形の部分の 3 個できる。したがって $P_2(4) = 3$ である。

5 本目を加えると、その直線は既存の 4 本と 4 点で交わる。新しい直線上には長さが有限な部分が $4 - 1 = 3$ 個でき、それぞれが有限な部分を一つ増やす。したがって $P_2(5) = P_2(4) + 3 = 6$ であり、 $P_2(5) = 6$ である。

(2) k 本の直線がある状態から、新しく 1 本の直線を加える。この新しい直線は、既存の k 本の直線と互いに異なる k 個の点で交わる。したがって、新しい直線は $k - 1$ 個の長さが有限な部分と、2 個の長さが有限でない部分に分けられる。

長さが有限な各部分は、それまでの平面の一つの部分の部分を切って、新しい有限な部分を一つ作る。一方、両端の長さが有限でない部分は有限な部分を作らない。よって $P_2(k+1) = P_2(k) + k - 1$ である。

(3) $P_2(1) = 0$ である。(2) の関係式を繰り返し用いると $P_2(k) = \sum_{j=1}^{k-1} (j - 1)$ である。したがって $P_2(k) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (k - 2)$ となる。よって $P_2(k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ である。



▶ 解法 2：全領域から無限領域を引く

【方針】

一般の位置にある k 本の直線が作る全領域数と、無限に広がる領域数を別々に数える。全領域は直線を 1 本加えるごとに k 個ずつ増え、無限領域は各直線の両側の端に対応して $2k$ 個である。その差が有限領域数になる。

【解答】

k 本の直線が作る全領域数を $R(k)$ とする。新しい 1 本は既存の k 本と相異なる k 点で交わり、 $k+1$ 個の部分に分かれる。その各部分が既存領域を一つずつ分けるので

$$R(k+1) = R(k) + k + 1.$$

$$R(0) = 1$$

から

$$R(k) = 1 + \frac{k(k+1)}{2}.$$

一方、無限に広がる領域は $k \geq 1$ のとき $2k$ 個である。実際、直線を 1 本加えるたびに、その直線の両端にある 2 個の半直線が無限領域を一つずつ分けるので、無限領域は 2 個増える。

したがって有限領域数は

$$\begin{aligned} P_2(k) &= R(k) - 2k \\ &= 1 + \frac{k(k+1)}{2} - 2k \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

(1)

$$P_2(4) = 3, \quad P_2(5) = 6.$$

(2) 一般式から直接、

$$P_2(k+1) - P_2(k) = k - 1,$$

すなわち

$$P_2(k+1) = P_2(k) + k - 1$$

である。

(3) 以上より

$$P_2(k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

である。

【総評】 平面を直線で分けるときの有限領域だけを数える問題で、目安時間は 18 分。全領域数ではなく有限な部分だけを数えるため、新しい直線上の有限な線分が何本あるかに注目するのが要点である。 k 個の交点から有限な線分は $k-1$ 個でき、それが増分になる。小問 (1) の $P_2(4), P_2(5)$ は、この増分の考え方の確認にもなっている。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 3 問】

3 次関数 $f(x) = x(x^2 + px + q)$ は $x = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) で極大値 0 をとり、 $x = \beta$ で極小値 -32 をとるとする。次の問に答えよ。

- (1) α, β, p, q を求めよ。
- (2) $f(x)$ を x 軸の正の方向へ c ($c > 0$) だけ平行移動した関数を $g(x)$ とするとき、2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積を c で表せ。

▶ 解法 1：極大点を重解として因数分解する

【方針】

$x = \alpha$ で極大値 0 をとり、しかも $\alpha \neq 0$ なので、 $x = \alpha$ は $f(x)$ の重解になる。したがって $f(x) = x(x - \alpha)^2$ と置ける。導関数からもう一つの極値点が $\alpha/3$ であることを求め、その値が -32 である条件から α を決める。(2) は $g(x) = f(x - c)$ とし、差 $f(x) - g(x)$ が二次式になることを利用する。交点が二つある範囲を判別式で調べ、二次式と x 軸で囲まれる面積公式として積分する。

【解答】

(1) $f(x) = x(x^2 + px + q)$ が $x = \alpha$ で極大値 0 をとるので $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$ である。 $\alpha \neq 0$ だから、 $x^2 + px + q$ は $x = \alpha$ を解にもつ。さらに微分条件も合わせると、 $x = \alpha$ は重解になる。よって $f(x) = x(x - \alpha)^2$ と書ける。

これを展開すると $f(x) = x^3 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x$ であるから $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2$ である。また $f'(x) = (x - \alpha)^2 + 2x(x - \alpha) = (x - \alpha)(3x - \alpha)$ なので、 $x = \alpha$ 以外の極値点は $\beta = \frac{\alpha}{3}$ である。

このとき

$$f(\beta) = f\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{\alpha}{3} - \alpha\right)^2 = \frac{\alpha}{3} \left(-\frac{2\alpha}{3}\right)^2 = \frac{4\alpha^3}{27}$$

である。これが -32 に等しいから $\frac{4\alpha^3}{27} = -32$ であり、 $\alpha^3 = -216$ より $\alpha = -6$ を得る。したがって $\beta = -2$, $p = 12$, $q = 36$ である。よって $\alpha = -6$, $\beta = -2$, $p = 12$, $q = 36$ である。

(2) (1) より $f(x) = x(x + 6)^2 = x^3 + 12x^2 + 36x$ である。 x 軸の正の方向へ c だけ平行移動した関数は $g(x) = f(x - c)$ である。

二つの曲線の交点は $f(x) = f(x - c)$ で決まる。差を計算すると $f(x) - f(x - c) = c\{3x^2 + (24 - 3c)x + c^2 - 12c + 36\}$ である。 $c > 0$ なので、交点の個数は二次方程式 $3x^2 + (24 - 3c)x + c^2 - 12c + 36 = 0$ の実数解の個数で決まる。この判別式は $(24 - 3c)^2 - 12(c^2 - 12c + 36) = 3(48 - c^2)$ である。したがって二つの交点をもち、囲まれる部分ができるのは $0 < c < 4\sqrt{3}$ のときである。 $c = 4\sqrt{3}$ では接するだけで面積は 0, $c > 4\sqrt{3}$ では囲まれる部分はない。 $0 < c < 4\sqrt{3}$ とする。上の二次式の二つの解を $u < v$ とする。二次式は上に開くので、 $u < x < v$ では $f(x) - g(x) < 0$ である。二つの解の差は $v - u = \frac{\sqrt{3(48 - c^2)}}{3} = \frac{\sqrt{48 - c^2}}{\sqrt{3}}$ である。よって面積 S は

$$S = \int_u^v \{g(x) - f(x)\} dx$$

である。

ここで、二次式 $3(x - u)(x - v)$ に c が掛かっていることを用いると $g(x) - f(x) = 3c(x - u)(v - x)$ である。したがって

$$S = 3c \int_u^v (x - u)(v - x) dx$$

である。 $L = v - u$ とおくと

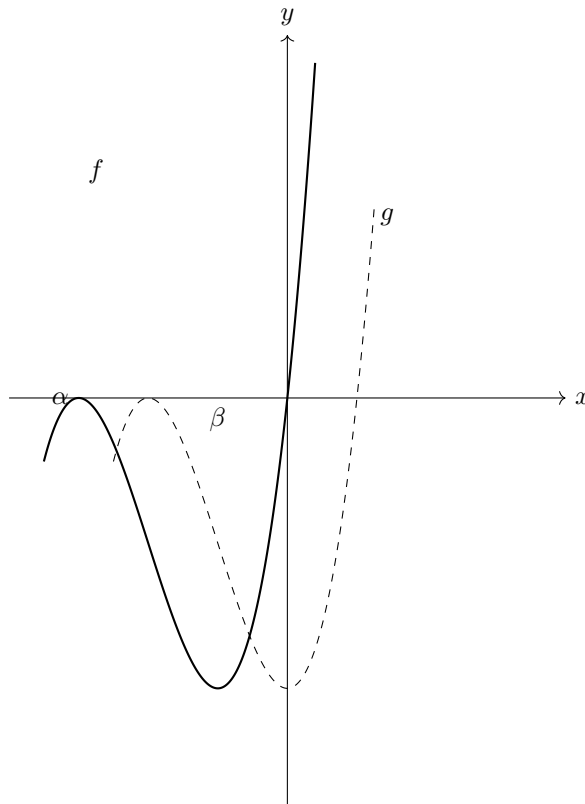
$$\int_u^v (x - u)(v - x) dx = \frac{L^3}{6}$$

だから

$$S = \frac{3c}{6} \left(\frac{\sqrt{48 - c^2}}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{18} c(48 - c^2)^{3/2}$$

である。

したがって $S = \frac{\sqrt{3}}{18} c(48 - c^2)^{3/2}$ ($0 < c < 4\sqrt{3}$) であり、 $c = 4\sqrt{3}$ では $S = 0$, $c > 4\sqrt{3}$ では囲まれる部分はない。



▶ 解法 2：極値点の係数関係と頂点中心の積分を使う

【方針】

(1) は導関数の 2 根が α, β であることと、 $f(\alpha) = 0$ を解と係数の関係に組み合わせる。(2) は差の二次式を頂点中心の形 $3c\{h^2 - (x - m)^2\}$ に直し、左右対称な積分として面積を求める。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$$

の 2 根は α, β なので

$$\alpha + \beta = -\frac{2p}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{q}{3}.$$

また $\alpha \neq 0$ かつ $f(\alpha) = 0$ より

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0.$$

$$p = -\frac{3}{2}(\alpha + \beta), \quad q = 3\alpha\beta$$

を代入して $\alpha \neq 0$ を用いると

$$\beta = \frac{\alpha}{3}.$$

さらに極大値 0 であることから

$$f(x) = x(x - \alpha)^2.$$

したがって

$$-32 = f(\beta) = \frac{4\alpha^3}{27}$$

より

$$\alpha = -6, \quad \beta = -2, \quad p = 12, \quad q = 36.$$

(2)

$$f(x) - f(x - c) = c\{3x^2 + (24 - 3c)x + c^2 - 12c + 36\}.$$

この二次式の軸と 2 根間の半幅を

$$m = \frac{c - 8}{2}, \quad h = \frac{\sqrt{48 - c^2}}{2\sqrt{3}}$$

とおく。囲まれる部分がある条件は

$$0 < c < 4\sqrt{3}$$

であり、このとき

$$g(x) - f(x) = 3c\{h^2 - (x - m)^2\}$$

が $m - h < x < m + h$ で成り立つ。よって面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 3c \int_{m-h}^{m+h} \{h^2 - (x - m)^2\} dx \\ &= 4ch^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} c(48 - c^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

$c = 4\sqrt{3}$ では接するだけで面積は 0、 $c > 4\sqrt{3}$ では囲まれる部分はない。

【総評】 極値条件から三次関数を決定し、平行移動後の面積を求める問題で、目安時間は 35 分。 $x = \alpha$ で極大値 0 という条件は、 $x = \alpha$ が重解であることを意味するため、 $f(x) = x(x - \alpha)^2$ と置けるのが大きい。面積では差 $f(x) - f(x - c)$ が二次式になることを利用し、判別式で囲まれる範囲を先に確認する。 $c = 4\sqrt{3}$ は接するだけで面積 0 になる端点として扱う。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 4 問】

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$, $n \geq 1$ で定めるとき、次の問に答えよ。

- (1) すべての n に対して $a_n > 1$ および $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) a_3 の値を求めよ。また $n \geq 3$ のとき $a_{n+1} - 1 \geq \frac{20}{41}(a_n - 1)^2$ が成り立つことを示せ。
- (3) $p_n = 2^{n-3}$ とし、 $b_n = \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82} \right)^{p_n}$ とおく。 $n \geq 3$ のとき、 $a_n - 1 \geq b_n$ を示せ。

▶ 解法 1：基本恒等式と数学的帰納法を使う

【方針】

基本式 $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2 / (2a_n)$ と $a_n - a_{n+1} = (a_n^2 - 1) / (2a_n)$ を作る。(1) はこれらから $a_n > 1$ と単調減少を帰納的に示す。(2) は $a_3 = 41/40$ を求め、 $n \geq 3$ では $1 < a_n \leq 41/40$ であることを使って分母 $2a_n$ を上から押さえる。(3) は $p_{n+1} = 2p_n$ と b_n の形が二乗評価に合わせて作られていることを使い、数学的帰納法で示す。

【解答】

(1) まず

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - 1 = \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{2a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}$$

である。 $a_1 = 2 > 1$ であり、 $a_n > 1$ なら右辺は正なので $a_{n+1} > 1$ である。よって帰納法により、すべての n で $a_n > 1$ が成り立つ。

次に

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n}$$

である。 $a_n > 1$ より右辺は正なので $a_{n+1} < a_n$ である。したがって $a_n > 1$, $a_{n+1} < a_n$ がすべての n で成り立つ。

(2) まず $a_2 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}$ である。したがって

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{41}{20} = \frac{41}{40}$$

である。

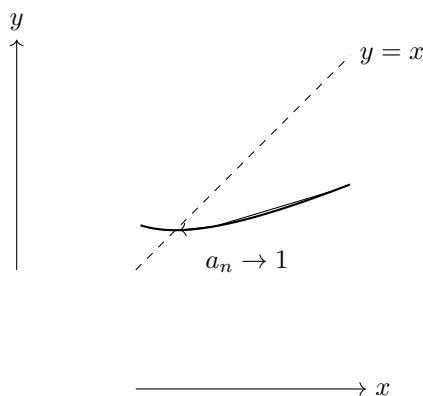
(1) より数列は 1 より大きく単調減少するので, $n \geq 3$ では $1 < a_n \leq a_3 = \frac{41}{40}$ である. 基本式 $a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}$ において $2a_n \leq \frac{41}{20}$ だから $\frac{1}{2a_n} \geq \frac{20}{41}$ である. よって $a_{n+1} - 1 \geq \frac{20}{41}(a_n - 1)^2$ ($n \geq 3$) が成り立つ.

(3) まず $n = 3$ のときを確認する. $p_3 = 2^0 = 1$ なので $b_3 = \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82} \right) = \frac{1}{40}$ である. 一方, $a_3 - 1 = \frac{41}{40} - 1 = \frac{1}{40}$ だから $a_3 - 1 = b_3$ である.

次に, ある $n \geq 3$ で $a_n - 1 \geq b_n$ が成り立つと仮定する. (2) より $a_{n+1} - 1 \geq \frac{20}{41}(a_n - 1)^2$ であるから $a_{n+1} - 1 \geq \frac{20}{41}b_n^2$ である. ここで $b_n = \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82} \right)^{p_n}$, $p_{n+1} = 2p_n$ なので

$$\frac{20}{41}b_n^2 = \frac{20}{41} \left\{ \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82} \right)^{p_n} \right\}^2 = \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82} \right)^{2p_n} = b_{n+1}$$

である. したがって $a_{n+1} - 1 \geq b_{n+1}$ が成り立つ. 数学的帰納法により $a_n - 1 \geq b_n$ ($n \geq 3$) が示された.



▶ 解法 2: 誤差を正規化して二乗を反復する

【方針】

誤差 $e_n = a_n - 1$ を導入し, 漸化式を $e_{n+1} = e_n^2 / (2a_n)$ と書く. 単調性から $a_n \leq a_3$ を得た後, $c_n = (20/41)e_n$ と正規化すると $c_{n+1} \geq c_n^2$ になる. これを繰り返して二重指数型の下界を直接得る.

【解答】

(1)

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}, \quad a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n}.$$

$a_1 = 2 > 1$ から帰納的に $a_n > 1$ であり, そのとき第 2 式の右辺も正なので

$$a_{n+1} < a_n.$$

(2)

$$a_2 = \frac{5}{4}, \quad a_3 = \frac{41}{40}.$$

$n \geq 3$ では

$$1 < a_n \leq \frac{41}{40}$$

である. したがって

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} \geq \frac{20}{41}(a_n - 1)^2.$$

(3)

$$e_n = a_n - 1, \quad c_n = \frac{20}{41}e_n$$

とおく. (2) から

$$c_{n+1} \geq c_n^2.$$

また

$$c_3 = \frac{20}{41} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{82}.$$

よって二乗評価を $n-3$ 回繰り返すと

$$c_n \geq \left(\frac{1}{82}\right)^{2^{n-3}}.$$

したがって

$$a_n - 1 = e_n \geq \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82}\right)^{2^{n-3}} = b_n$$

である。

【総評】 二乗型の漸化式評価を扱う問題で、目安時間は 28 分。まず $a_{n+1} - 1$ と $a_n - a_{n+1}$ をそれぞれ因数分解した形にすることが重要である。(2) では単調減少から $a_n \leq a_3 = 41/40$ を使い、分母を上から押さえて下からの評価に変える。(3) の b_n は複雑に見えるが、 $p_{n+1} = 2p_n$ によって二乗すると次の b_{n+1} になるよう作られている。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 5 問】

$f(x) = ax + e^{-x} \sin x$, $g(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ とする。

(1) $y = g(x)$ ($x \geq 0$) のグラフの概形を描け。

(2) $f(x)$ が区間 $0 < x < 2\pi$ 内で極値として極大値のみを 1 つだけもつとき、 a の範囲を定めよ。

▶ 解法 1：補助関数と水平線の交点を調べる

【方針】

まず $f'(x) = a + g(x)$ であることを確認する。したがって、 f の極値の個数と種類は、 $g(x)$ のグラフと水平線 $y = -a$ の交点の個数および符号変化で決まる。(1) では $g'(x) = -2e^{-x} \cos x$ から増減を調べ、零点と極値を押さえて概形を描く。(2) では $0 < x < 2\pi$ において、水平線 $y = -a$ が最初の減少部分だけで交わり、または第 2 の山の頂点で接する場合だけが「極大値のみを 1 つ」に対応する。

【解答】

(1) $g(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ である。微分すると $g'(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x} \cos x$ である。 $e^{-x} > 0$ なので、 $g'(x)$ の符号は $-\cos x$ の符号で決まる。

したがって $x > 0$ では、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $g'(x) < 0$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ で $g'(x) > 0$, $\frac{3\pi}{2} < x$ で $g'(x) < 0$ である。また $g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\pi/2}$, $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-3\pi/2}$ である。

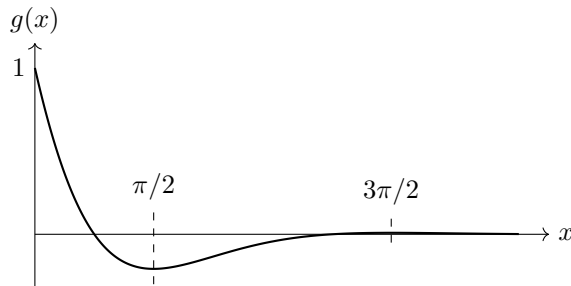
零点は $\cos x - \sin x = 0$ から $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ である。よって概形は、 $(0, 1)$ から減少して $x = \pi/4$ で x 軸を横切り、 $x = \pi/2$ で最小値 $-e^{-\pi/2}$ をとり、その後増加して $x = 5\pi/4$ で再び x 軸を横切り、 $x = 3\pi/2$ で最大値 $e^{-3\pi/2}$ をとり、その後減少しながら 0 に近づく形である。

(2) $f(x) = ax + e^{-x} \sin x$ を微分すると $f'(x) = a + e^{-x}(\cos x - \sin x) = a + g(x)$ である。したがって $f'(x) = 0$ は $g(x) = -a$ と同値である。つまり、 f の極値は、 g のグラフと水平線 $y = -a$ の交点で決まる。 $0 < x < 2\pi$ で考える。 g は $(0, \pi/2)$ で減少するので、この区間で水平線と交わると、 $f'(x) = a + g(x)$ は正から負へ変わり、 f は極大値をとる。

一方、 g は $(\pi/2, 3\pi/2)$ で増加する。ここで交わると、 $f'(x)$ は負から正へ変わるので、極小値が生じてしまう。また $(3\pi/2, 2\pi)$ で交わると、さらに極大値が生じる。

したがって、極大値のみを 1 つだけもつためには、水平線 $y = -a$ が最初の減少部分では 1 回交わり、 $(\pi/2, 3\pi/2)$ の増加部分では符号変化を伴う交点をもたないことが必要である。最初の減少部分で交わるためには $-e^{-\pi/2} < -a < 1$ が必要であるが、増加部分で通常の交点をもたないためには、その最大値 $e^{-3\pi/2}$ 以上でなければならない。 $-a = e^{-3\pi/2}$ のときは $x = 3\pi/2$ で接するだけで、 $f'(x)$ の符号は変わらないので極値は増えない。

よって条件は $e^{-3\pi/2} \leq -a < 1$ である。したがって $-1 < a \leq -e^{-3\pi/2}$ である。



▶ 解法 2：導関数の 4 区間の符号を直接追う

【方針】

$f'(x) = a + g(x)$ と $g'(x) = -2e^{-x} \cos x$ を用い、 $0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$ で区切った各区間で f' の増減と符号を追う。最初の区間で正から負へ 1 回だけ変わり、その後は正にならないための端点条件を組み合わせる。

【解答】

(1)

$$g'(x) = -2e^{-x} \cos x.$$

したがって g は

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ で減少, } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ で増加, } \left(\frac{3\pi}{2}, \infty\right) \text{ で減少}$$

する。主な値は

$$g(0) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\pi/2}, \quad g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-3\pi/2}$$

であり、零点は $\pi/4, 5\pi/4, \dots$ である。

(2)

$$f'(x) = a + g(x).$$

$(0, \pi/2)$ で極大点がちょうど 1 個生じるためには、 f' が正から負へ 1 回変わればよい。端点側の条件は

$$a + 1 > 0.$$

求める場合には $a < 0$ となるので

$$a - e^{-\pi/2} < 0$$

は自動的に満たされ、減少性から交点は 1 個だけである。

続く $(\pi/2, 3\pi/2)$ で f' は増加する。ここで正になれば極小値が生じるため、その最大値に対して

$$a + e^{-3\pi/2} \leq 0$$

が必要十分である。等号のとき $x = 3\pi/2$ で $f' = 0$ となるが、符号は変わらないので極値ではない。その後 f' は減少するため、新たな極大点もない。

以上から

$$-1 < a \leq -e^{-3\pi/2}$$

である。

【総評】 導関数を補助関数 g としてグラフで判定する問題で、目安時間は 35 分。 $f'(x) = a + g(x)$ に気づけば、あとは g と水平線 $y = -a$ の交点問題になる。 g は $\pi/2$ で最小、 $3\pi/2$ で小さな正の最大値をとるため、 $-a$ が $e^{-3\pi/2}$ より小さいと余分な極小・極大が発生する。端点 $-a = e^{-3\pi/2}$ では接するだけで符号変化がない点を明示するのが重要である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。