

九州大学 1992 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上に四角形 $ABCD$ と、この四角形の外部に点 E がある。これらの点から得られるベクトルについて

$$2\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0},$$

$$8\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC})$$

が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a} = \overrightarrow{EA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{EB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{ED}$ とおく。 $\vec{c}$ を $\vec{b}, \vec{d}$ で表せ。
- (2) 四角形 $BCDE$ はどのような四角形か。
- (3) 直線 EA と直線 BD の交点を F とするとき、 EA と AF の長さの比を求めよ。
- (4) 四角形 $ABCD$ と四角形 $BCDE$ の面積の比を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 つの条件式をすべて $\vec{a} = \overrightarrow{EA}, \vec{b} = \overrightarrow{EB}, \vec{c} = \overrightarrow{EC}, \vec{d} = \overrightarrow{ED}$ で表し直す。第 1 式から $\vec{a}$ を $\vec{b}, \vec{d}$ で表し、第 2 式へ代入して $\vec{c}$ を決める。四角形 $BCDE$ の形は辺ベクトルで判定し、交点 F は EA 上と BD 上の 2 通りに表して係数比較する。面積比は $\vec{b}, \vec{d}$ を基準にした平面座標で四角形 $ABCD$ の面積を計算し、平行四辺形 $BCDE$ と比べる。

【解答】

- (1)
- $$\overrightarrow{AE} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$
- である。第 1 式 $2\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ に代入すると $-2\vec{a} + 3(\vec{d} - \vec{a}) + 2(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$ である。よって $2\vec{b} + 3\vec{d} - 7\vec{a} = \vec{0}$ となり、 $\vec{a} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{7}$ を得る。

次に第 2 式を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表す。

$$\overrightarrow{EA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$$

だから $8\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = 3\{(\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{c} - \vec{d})\}$ である。すなわち $7\vec{a} + \vec{b} = 6\vec{c} - 3\vec{b} - 3\vec{d}$ である。ここに $7\vec{a} = 2\vec{b} + 3\vec{d}$ を代入すると $3\vec{b} + 3\vec{d} = 6\vec{c} - 3\vec{b} - 3\vec{d}$ となる。したがって $6\vec{c} = 6\vec{b} + 6\vec{d}$ より $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ である。

- (2) (1) より $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ であるから

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \vec{d}, \quad \overrightarrow{ED} = \vec{d}$$

である。また

$$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c} = -\vec{b}, \quad \overrightarrow{BE} = -\vec{b}$$

である。したがって、向かい合う 2 組の辺がそれぞれ平行で長さも等しいので、四角形 $BCDE$ は 平行四辺形 である。

- (3) 点 F は直線 EA 上にあるので、ある実数 u を用いて $\overrightarrow{EF} = u\vec{a}$ と書ける。また直線 BD 上にもあるので、ある実数 v を用いて $\overrightarrow{BF} = \vec{b} + v(\vec{d} - \vec{b}) = (1-v)\vec{b} + v\vec{d}$ と書ける。

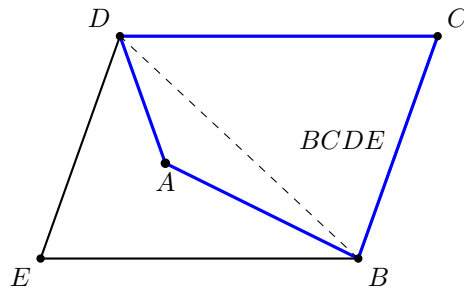
一方 $\vec{a} = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{d}$ だから $u\vec{a} = \frac{2u}{7}\vec{b} + \frac{3u}{7}\vec{d}$ である。係数を比較すると $\frac{2u}{7} = 1-v$, $\frac{3u}{7} = v$ である。第 2 式を第 1 式へ代入して $\frac{2u}{7} = 1 - \frac{3u}{7}$ より $u = \frac{7}{5}$ を得る。したがって F は E から A を越えた位置にあり、 $AF = \left(\frac{7}{5} - 1\right)EA = \frac{2}{5}EA$ である。ゆえに $EA : AF = 5 : 2$ である。

- (4) 平行四辺形 $BCDE$ の面積を基準にする。 $\vec{b}, \vec{d}$ を 2 つの方向の基準として、点を係数で表すと $E = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $D = (0, 1)$, $C = (1, 1)$, であり、また $A = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{d}$ だから $A = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ である。

この座標で四角形 $ABCD$ の面積を求める。平行四辺形 $BCDE$ の面積を 1 と見れば、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \left| \frac{2}{7} \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{7} \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{7} \right) \right|$$

である。したがって $[ABCD] = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{5}{7} \right) = \frac{9}{14}$ となる。よって $[ABCD] : [BCDE] = 9 : 14$ である。



▶ 解法 2

【方針】

点 E を原点とし、 $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}$ の係数をそのまま座標として使う。面積比は四角形を三角形に分け、同じ底辺に対する高さの比で求める。

【解答】

(1)

第 1 の関係式を E を始点とするベクトルへ直すと

$$-2\overrightarrow{EA} + 3(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA}) + 2(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

したがって

$$7\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{ED}.$$

第 2 の関係式へ代入して整理すれば

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}.$$

(2)

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EB}$$

だから、四角形 $BCDE$ は平行四辺形である。

(3)

$\overrightarrow{EF} = u\overrightarrow{EA}$ とおく。一方、 F は BD 上にあるから

$$\overrightarrow{EF} = (1-v)\overrightarrow{EB} + v\overrightarrow{ED}$$

とも書ける。

$$u\overrightarrow{EA} = \frac{2u}{7}\overrightarrow{EB} + \frac{3u}{7}\overrightarrow{ED}$$

と係数を比べると

$$\frac{2u}{7} = 1-v, \quad \frac{3u}{7} = v.$$

よって $u = 7/5$ であり

$$EA : AF = 1 : \left(\frac{7}{5} - 1 \right) = 5 : 2.$$

(4)

平行四辺形 $BCDE$ の面積を T とする。対角線 BD により

$$[BCD] = \frac{T}{2}.$$

また

$$\overrightarrow{EA} = \frac{2}{7}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{ED}$$

であり、係数の和が $5/7$ だから、点 A から直線 BD までの高さは点 E から直線 BD までの高さの $2/7$ 倍である。したがって

$$[ABD] = \frac{2}{7}[EBD] = \frac{T}{7}.$$

ゆえに

$$[ABCD] = [BCD] + [ABD] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)T = \frac{9}{14}T.$$

よって

$$[ABCD] : [BCDE] = 9 : 14.$$

【総評】 ベクトル条件を、基準点 E から見た 4 本のベクトルに統一する問題である。目安時間は 22 分。(1) では $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$ の向きを間違えやすい。(3) は交点を 2 通りに表して係数比較するだけだが、 $u = \frac{7}{5}$ となるため F が A の外側に出ることを読み取る必要がある。(4) は $\vec{b}, \vec{d}$ を基準にすれば、平行四辺形の面積を 1 として比だけを計算できる。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合した。高校数学の範囲内で完結させた。

【第 2 問】

3 次曲線

$$C: y = x^3 + 9x^2 + 9x + 2$$

上に点 $P_0(x_0, y_0)$ をとる。ただし $x_0 > 0$ とする。自然数 n に対して、 C 上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を「 P_{n-1} を通る直線が $P_n \neq P_{n-1}$ で C と接する」ように定める。次の問いに答えよ。

(1) $n > 0$ のとき

$$2x_n + x_{n-1} + 9 = 0$$

が成り立つことを示せ。

(2) x_n を x_0 で表せ。

(3) n を大きくすると P_n が C 上の定点に近づくことを示し、その定点を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

P_n における接線が P_{n-1} を通る条件を、接線の式に x_{n-1} を代入して表す。差 $f(x_{n-1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n-1} - x_n)$ は因数分解でき、 $P_n \neq P_{n-1}$ から残りの因子が 0 になる。漸化式は $x_n + 3$ を見ると等比数列になり、極限点は $x = -3$ を曲線に代入して求める。

【解答】

(1) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 2$ とおく。点 P_n における接線の式は $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ である。この接線が $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ を通るので $f(x_{n-1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n-1} - x_n)$ である。

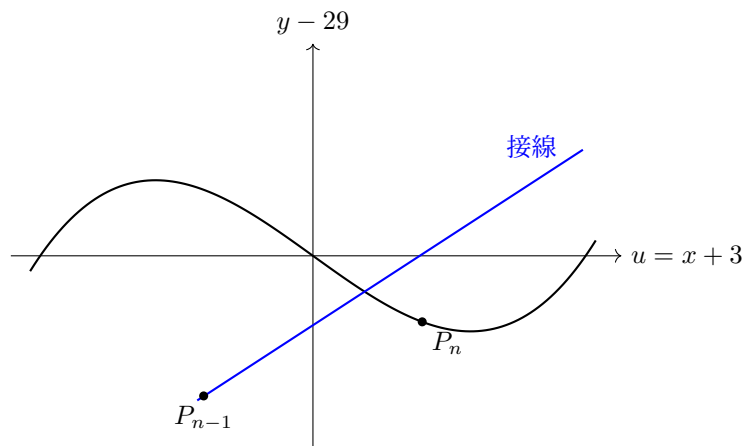
ここで $f'(x) = 3x^2 + 18x + 9$ だから、左辺から右辺を引いて整理すると

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_{n-1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n-1} - x_n) \\ &= (x_{n-1} - x_n)^2(x_{n-1} + 2x_n + 9) \end{aligned}$$

である。 $P_n \neq P_{n-1}$ なので $x_n \neq x_{n-1}$ である。したがって $x_{n-1} + 2x_n + 9 = 0$ すなわち $2x_n + x_{n-1} + 9 = 0$ である。

(2) (1) より $x_n = -\frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{9}{2}$ である。両辺に 3 を加えると $x_n + 3 = -\frac{1}{2}(x_{n-1} + 3)$ である。したがって $x_n + 3$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であり、 $x_n + 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x_0 + 3)$ である。よって $x_n = -3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x_0 + 3)$ である。

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ だから、(2) より $x_n \rightarrow -3$ である。点 P_n は曲線 C 上にあるので $y_n = f(x_n) \rightarrow f(-3)$ である。実際に $f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 + 9(-3) + 2 = -27 + 81 - 27 + 2 = 29$ である。したがって P_n は $(-3, 29)$ に近づく。



▶ 解法 2

【方針】

3 次方程式と接線の交点では接点が重解になることを使い、3 つの交点の x 座標の和を係数から読む。以後は等比数列として処理する。

【解答】

(1)

P_n における接線と曲線 C の交点を求める 3 次方程式を考える。 $x = x_n$ は接点なので 2 重解であり、残る解が $x = x_{n-1}$ である。もとの 3 次式の x^2 の係数は 9 で、接線を引いても x^2 の係数は変わらない。したがって 3 解の和より

$$x_{n-1} + 2x_n = -9.$$

よって

$$2x_n + x_{n-1} + 9 = 0.$$

(2)

$$x_n + 3 = -\frac{1}{2}(x_{n-1} + 3)$$

だから

$$x_n + 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x_0 + 3).$$

したがって

$$x_n = -3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x_0 + 3).$$

(3)

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

より $x_n \rightarrow -3$ である。曲線の式は連続だから

$$y_n \rightarrow (-3)^3 + 9(-3)^2 + 9(-3) + 2 = 29.$$

よって P_n は定点

$$(-3, 29)$$

へ近づく。

【総評】 接線条件を代数的に因数分解し、漸化式へ落とす問題である。目安時間は 20 分。接線の式に x_{n-1} を代入した後、 $(x_{n-1} - x_n)^2$ が出るため、 $P_n \neq P_{n-1}$ の条件を使って残りの因子を 0 にする流れが重要である。漸化式は $x_n + 3$ に直すと一行で解け、極限点も曲線上の点として y 座標まで確認できる。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合した。高校数学の範囲内で完結させた。

【第 3 問】

曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点 $(a, f(a))$ における法線が点 $(0, cf(a))$ を通るとする。ただし $c \neq 1$ は定数である。次の問いに答えよ。

(1) この曲線が微分方程式

$$(c-1)y \frac{dy}{dx} = x$$

を満たすことを証明せよ。

(2) (1) の微分方程式を満たす曲線が $(0, 1)$ を通るとき、その曲線の方程式を求め、図をかけ。

(3) $c < 1$ のとき、(2) で得た曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積が π となるように c を定めよ。

▶ 解法 1

【方針】

曲線上の点 (x, y) と、法線が通る点 $(0, cy)$ を結んで法線の傾きを表す。接線の傾き $\frac{dy}{dx}$ との積が -1 になることから微分方程式を得る。(2) は変数分離の形で積分し、 $(0, 1)$ を通る条件で定数を決める。(3) は $c < 1$ で得られるだ円を x 軸のまわりに回転し、

$$\pi \int y^2 dx$$

で体積を計算する。

【解答】

(1) 曲線上の点を (x, y) とする。この点における法線は $(0, cy)$ を通るので、 $x \neq 0$ のとき法線の傾きは $\frac{cy - y}{0 - x} = \frac{(1-c)y}{x}$ である。

接線の傾きは $\frac{dy}{dx}$ であり、接線と法線は垂直だから $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{(1-c)y}{x} = -1$ である。両辺を整理して $(c-1)y \frac{dy}{dx} = x$ を得る。 $x = 0$ の点でも、得られた式は連続的に同じ関係を表している。

(2) (1) の微分方程式を積分する。 $(c-1)y \frac{dy}{dx} = x$ より $(c-1)y dy = x dx$ と見て積分すると $(c-1)y^2 = x^2 + C$ と書ける。曲線は $(0, 1)$ を通るので $c-1 = C$ である。したがって $(c-1)y^2 = x^2 + c - 1$ であり、 $y^2 = 1 + \frac{x^2}{c-1}$ である。 $c > 1$ のときは $y^2 - \frac{x^2}{c-1} = 1$ となり、上下に開く双曲線である。 $c < 1$ のときは $y^2 = 1 - \frac{x^2}{1-c}$ すなわち $\frac{x^2}{1-c} + y^2 = 1$ となり、 x 軸方向の半径が $\sqrt{1-c}$ 、 y 軸方向の半径が 1 のだ円である。

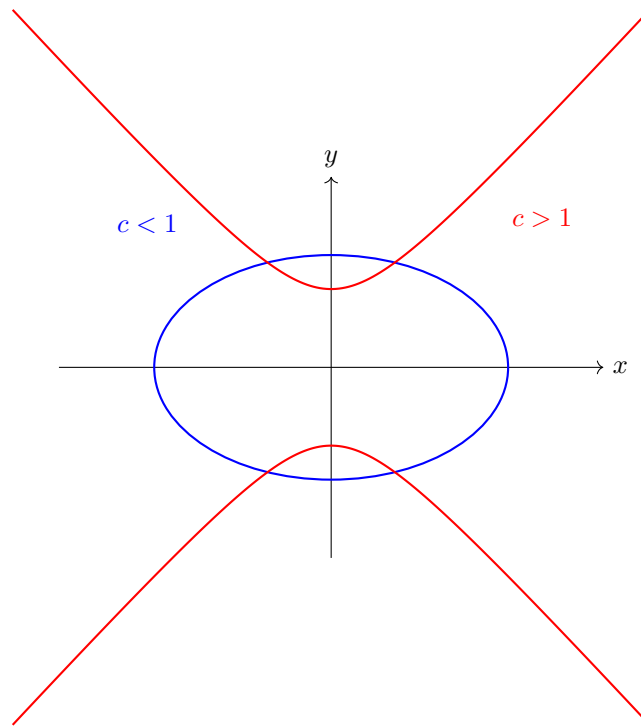
(3) $c < 1$ とし、 $\alpha = \sqrt{1-c}$ とおく。このとき曲線は $y^2 = 1 - \frac{x^2}{\alpha^2}$ ($-\alpha \leq x \leq \alpha$) である。これを x 軸のまわりに回転してできる体積は

$$V = \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 dx = \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) dx$$

である。計算すると

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[x - \frac{x^3}{3\alpha^2} \right]_{-\alpha}^{\alpha} \\ &= \pi \left(\frac{2\alpha}{1} - \frac{2\alpha}{3} \right) = \frac{4\pi\alpha}{3}. \end{aligned}$$

これが π に等しいので $\frac{4\alpha}{3} = 1$ であり、 $\alpha = \frac{3}{4}$ である。したがって $1-c = \alpha^2 = \frac{9}{16}$ より $c = \frac{7}{16}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

微分方程式を y^2 の導関数として積分する。 $c < 1$ では得られた楕円の回転体を、単位球を x 方向へ拡大・縮小した立体として扱う。

【解答】

(1)

曲線上の点を (x, y) とする。法線は $(0, cy)$ を通るので、その傾きは

$$\frac{cy - y}{0 - x} = \frac{(1 - c)y}{x}.$$

接線との傾きの積が -1 だから

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{(1 - c)y}{x} = -1.$$

よって

$$(c - 1)y \frac{dy}{dx} = x.$$

(2)

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{c - 1}.$$

積分して

$$y^2 = \frac{x^2}{c - 1} + C.$$

$(0, 1)$ を通るから $C = 1$ であり

$$y^2 = 1 + \frac{x^2}{c - 1}.$$

$c > 1$ では

$$y^2 - \frac{x^2}{c - 1} = 1$$

という双曲線、 $c < 1$ では

$$\frac{x^2}{1 - c} + y^2 = 1$$

という楕円である。

(3)

$c < 1$ とし

$$\alpha = \sqrt{1-c}$$

とおく。楕円は

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + y^2 = 1.$$

これを x 軸のまわりに回転した立体は、半径 1 の球を x 方向だけ α 倍したものになる。したがって体積は

$$V = \alpha \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

$V = \pi$ より

$$\alpha = \frac{3}{4}.$$

ゆえに

$$1-c = \frac{9}{16}, \quad c = \frac{7}{16}.$$

【総評】 法線の通過点から微分方程式を作る問題である。目安時間は 24 分。(1) では法線の傾きを $\frac{(1-c)y}{x}$ と書き、接線との垂直条件を使う。(2) では積分定数を $(0,1)$ で決めた後、 $c > 1$ と $c < 1$ で図形が変わることを明示する。(3) は $c < 1$ なのでだ円になり、回転体積は

$$\pi \int y^2 dx$$

で処理する。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合した。高校数学の範囲内で完結させた。

【第 4 問】

立方体 $ABCD-EFGH$ の辺 AE, CG の中点をそれぞれ L, M とする。点 X が辺 AB 上を動くとき、3 点 L, M, X を通る平面による立方体の切り口を K_X とする。 K_X の周の長さが最小となる点を X_0 とする。次の問いに答えよ。

- (1) $AB = 2$, $AX = 2t$ として、 K_X の周の長さ $s(t)$ を求めよ。
- (2) X_0 が辺 AB の中点であることを示せ。
- (3) 直線 DF が平面 LMX_0 に垂直であることを証明せよ。
- (4) $\angle LX_0M$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

立方体を一辺 2 の座標空間に置き、 $X = (2t, 0, 0)$ 、 $L = (0, 0, 1)$ 、 $M = (2, 2, 1)$ とする。まず平面 LMX の式を出し、立方体の各面との交線から切り口の 6 頂点を拾う。周長は 2 種類の辺長の和になるので $s(t)$ を求め、微分で最小を示す。 $t = \frac{1}{2}$ の平面の法線方向を使えば、 DF との垂直性と $\angle LX_0M$ も内積で確認できる。

【解答】

(1) 立方体を $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $E(0, 0, 2)$, $F(2, 0, 2)$, $G(2, 2, 2)$, $H(0, 2, 2)$ とおく。このとき $L(0, 0, 1)$, $M(2, 2, 1)$, $X(2t, 0, 0)$ である。

平面 LMX は、これら 3 点を代入して $x - y = 2t(1 - z)$ と表される。 $0 \leq t \leq 1$ である。

この平面と立方体の辺との交点を順に拾う。底面 $z = 0$ では $x - y = 2t$ だから、切り口は $X = (2t, 0, 0)$, $Y = (2, 2 - 2t, 0)$ を通る。面 $x = 2$ では Y から $M = (2, 2, 1)$ へ進む。面 $y = 2$ では $V = (2 - 2t, 2, 2)$ へ進む。上面 $z = 2$ では $U = (0, 2t, 2)$ へ進む。さらに面 $x = 0$ では U から $L = (0, 0, 1)$ へ進み、面 $y = 0$ では L から X に戻る。

したがって切り口は六角形 $X \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow L \rightarrow X$ である。辺の長さは $XY = UV = 2\sqrt{2}(1 - t)$ であり、また $YM = MV = UL = LX = \sqrt{4t^2 + 1}$ である。よって周の長さは $s(t) = 4\sqrt{2}(1 - t) + 4\sqrt{4t^2 + 1}$ ($0 \leq t \leq 1$) である。

(2)

$$s'(t) = -4\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}} = -4\sqrt{2} + \frac{16t}{\sqrt{4t^2+1}}$$

である。 $s'(t) = 0$ とすると $\frac{16t}{\sqrt{4t^2+1}} = 4\sqrt{2}$ である。 $t \geq 0$ なので両辺を 2 乗して $256t^2 = 32(4t^2+1)$ すなわち $128t^2 = 32$ より $t = \frac{1}{2}$ を得る。

また $\frac{16t}{\sqrt{4t^2+1}}$ は $0 \leq t \leq 1$ で増加するので、 $s'(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ の前で負、後で正である。したがって最小となるのは $t = \frac{1}{2}$ のときであり、このとき $AX = 2t = 1$ である。よって X_0 は辺 AB の中点である。

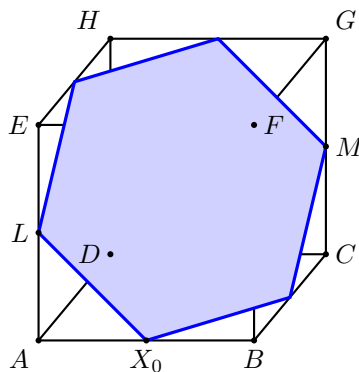
(3) $t = \frac{1}{2}$ のとき、平面 LMX_0 の式は $x - y = 1 - z$ すなわち $x - y + z - 1 = 0$ である。したがってこの平面に垂直な方向は $(1, -1, 1)$ である。

一方 $\overrightarrow{DF} = F - D = (2, 0, 2) - (0, 2, 0) = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$ である。よって $\overrightarrow{DF}$ は平面 LMX_0 に垂直な方向と平行である。したがって $DF \perp$ 平面 LMX_0 である。

(4) $X_0 = (1, 0, 0)$ であるから $\overrightarrow{X_0L} = L - X_0 = (-1, 0, 1)$ であり、 $\overrightarrow{X_0M} = M - X_0 = (1, 2, 1)$ である。内積を計算すると

$$\overrightarrow{X_0L} \cdot \overrightarrow{X_0M} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0$$

である。したがって 2 つのベクトルは垂直であり、 $\angle LX_0M = 90^\circ$ である。



▶ 解法 2

【方針】

(1) の辺長を使い、平方して確かめられる不等式で周長の最小値を示す。(3) は $\overrightarrow{DF}$ が平面内の 2 方向へとも垂直であることを内積で確かめる。

【解答】

(1)

切り口の 6 辺を立方体の各面上で測ると

$$XY = UV = 2\sqrt{2}(1-t)$$

であり、残る 4 辺はすべて

$$\sqrt{4t^2+1}$$

である。したがって

$$s(t) = 4\sqrt{2}(1-t) + 4\sqrt{4t^2+1} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

(2)

$0 \leq t \leq 1$ では両辺が 0 以上であり

$$\sqrt{4t^2+1} \geq \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ。実際、両辺を 2 乗した差は

$$4t^2 + 1 - \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{s(t)}{4} &= \sqrt{2}(1-t) + \sqrt{4t^2+1} \\ &\geq \sqrt{2}(1-t) + \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

等号は $t = 1/2$ のときに限る。したがって X_0 は AB の中点である。

(3)

座標を

$$A(0,0,0), \quad B(2,0,0), \quad D(0,2,0), \quad E(0,0,2)$$

とおく。すると

$$X_0(1,0,0), \quad L(0,0,1), \quad M(2,2,1)$$

である。

$$\overrightarrow{DF} = (2, -2, 2), \quad \overrightarrow{X_0L} = (-1, 0, 1), \quad \overrightarrow{X_0M} = (1, 2, 1)$$

だから

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{X_0L} = 0, \quad \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{X_0M} = 0.$$

X_0L, X_0M は平面内の交わる 2 直線なので

$$DF \perp \text{平面 } LMX_0.$$

(4)

$$\overrightarrow{X_0L} \cdot \overrightarrow{X_0M} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0.$$

したがって

$$\angle LX_0M = 90^\circ.$$

【総評】 立方体の切断面を座標で完全に追う空間図形の総合問題である。目安時間は 34 分。(1) では切り口が六角形になることを、頂点 X, Y, M, V, U, L の順に明示すると周長式の根拠がはっきりする。(2) は微分計算自体より、 $s'(t)$ が一度だけ 0 になることの説明が大切である。(3)(4) は $t = \frac{1}{2}$ の平面式 $x - y + z - 1 = 0$ を使えば、垂直性も角度も短く処理できる。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合した。高校数学の範囲内で完結させた。

【第 5 問】

x と書いた玉が a 個、 y と書いた玉が b 個入った袋がある。ただし $a \geq 2, b \geq 2$ とする。袋から 2 個を取り出して種類を調べた後、袋に戻す。この試行ごとに、 xy 平面上の点 P を次のように動かす。

取り出した玉	P の移動
x が 2 個	$(2, 0)$
x, y が 1 個ずつ	$(1, 1)$
y が 2 個	$(0, 2)$

P は原点から出発する。次の問いに答えよ。

- (1) 1 回後に P が存在し得る点と、それぞれの確率を求めよ。
- (2) 2 回後に P が存在し得る点と、それぞれの確率を求めよ。
- (3) $a = b$ のとき、2 回後に P が存在する確率が最も大きい点を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

1 回の移動を、 $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ の 3 通りとその確率に分ける。2 回後は独立な 2 回の移動の和なので、同じ点に到達する組み合わせを足し合わせる。 $a = b$ のときは 3 つの 1 回移動確率が $p = r$ 、 $q > p$ となるため、2 回後の 5 点の確率を比較して最大点を決める。

【解答】

(1) 袋の中の玉の総数を $N = a + b$ とおく。2 個とも x である確率は

$$\frac{{}_a C_2}{{}_N C_2} = \frac{a(a-1)}{N(N-1)}$$

であり、このとき点は $(2, 0)$ に移る。

1 個が x 、1 個が y である確率は $\frac{ab}{{}_N C_2} = \frac{2ab}{N(N-1)}$ であり、このとき点は $(1, 1)$ に移る。

2 個とも y である確率は

$$\frac{{}_b C_2}{{}_N C_2} = \frac{b(b-1)}{N(N-1)}$$

であり、このとき点は $(0, 2)$ に移る。したがって 1 回後に存在し得る点と確率は

$$(2, 0) : \frac{a(a-1)}{N(N-1)}, \quad (1, 1) : \frac{2ab}{N(N-1)}, \quad (0, 2) : \frac{b(b-1)}{N(N-1)}$$

である。

(2) 簡単のため

$$p = \frac{a(a-1)}{N(N-1)}, \quad q = \frac{2ab}{N(N-1)}, \quad r = \frac{b(b-1)}{N(N-1)}$$

とおく。1 回の移動はそれぞれ $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ であり、確率は p, q, r である。2 回後の点はこの 2 回の移動の和であるから、 $(4, 0) : p^2$ である。 $(3, 1)$ は $(2, 0) + (1, 1)$ または $(1, 1) + (2, 0)$ で起こるので $(3, 1) : 2pq$ である。 $(2, 2)$ は $(1, 1) + (1, 1)$ または $(2, 0) + (0, 2)$, $(0, 2) + (2, 0)$ で起こるので $(2, 2) : q^2 + 2pr$ である。同様に $(1, 3) : 2qr$, $(0, 4) : r^2$ である。したがって

点	$(4, 0)$	$(3, 1)$	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(0, 4)$
確率	p^2	$2pq$	$q^2 + 2pr$	$2qr$	r^2

である。

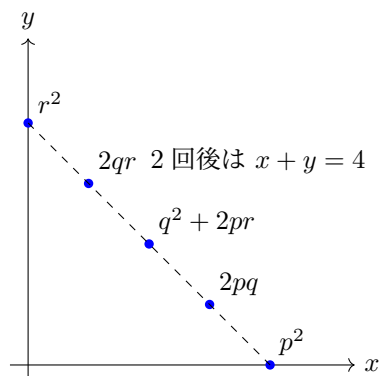
(3) $a = b$ とする。このとき対称性より $p = r$ である。また

$$p = r = \frac{a(a-1)}{2a(2a-1)} = \frac{a-1}{2(2a-1)}, \quad q = \frac{2a^2}{2a(2a-1)} = \frac{a}{2a-1}$$

である。したがって $q = \frac{2a}{2(2a-1)} > \frac{a-1}{2(2a-1)} = p$ である。

2 回後の確率は、対称性により $(4, 0)$ と $(0, 4) : p^2$, $(3, 1)$ と $(1, 3) : 2pq$ であり、中央の点 $(2, 2)$ の確率は $q^2 + 2p^2$ である。

まず $q^2 + 2p^2 - p^2 = q^2 + p^2 > 0$ なので、中央の確率は端の確率より大きい。また $q^2 + 2p^2 - 2pq = (q-p)^2 + p^2 > 0$ なので、中央の確率は隣の確率よりも大きい。したがって 2 回後に点 P が存在する確率が最も大きい点は $(2, 2)$ である。



▶ 解法 2

【方針】

1 回の移動を 2 変数の多項式で表し、その 2 乗の各項を 2 回後の点と確率に対応させる。 $a = b$ では係数の対称性を使って中央の項を比較する。

【解答】

(1)

$N = a + b$ とし

$$p = \frac{a(a-1)}{N(N-1)}, \quad q = \frac{2ab}{N(N-1)}, \quad r = \frac{b(b-1)}{N(N-1)}$$

とおく。1 回後の点と確率は

$$(2, 0) : p, \quad (1, 1) : q, \quad (0, 2) : r.$$

(2)

横方向の移動を u 、縦方向の移動を v で表すと、1 回の移動は多項式

$$pu^2 + quv + rv^2$$

に対応する。2 回後はその 2 乗

$$(pu^2 + quv + rv^2)^2 = p^2u^4 + 2pqu^3v + (q^2 + 2pr)u^2v^2 + 2qruv^3 + r^2v^4$$

に対応する。したがって

点	(4, 0)	(3, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(0, 4)
確率	p^2	$2pq$	$q^2 + 2pr$	$2qr$	r^2

である。

(3)

$a = b$ なら $p = r$ であり

$$p = \frac{a-1}{2(2a-1)}, \quad q = \frac{a}{2a-1} > p.$$

中央の点の確率と他の確率との差は

$$q^2 + 2p^2 - p^2 = q^2 + p^2 > 0$$

および

$$q^2 + 2p^2 - 2pq = (q-p)^2 + p^2 > 0$$

である。対称性により残る 2 点との比較も同じだから、最大となる点は

$$(2, 2)$$

である。

【総評】 復元抽出による 1 回の移動確率を作り、2 回分を足し合わせる確率問題である。目安時間は 20 分。(1) では 2 個取り出すため、 ${}_NC_2$ を分母にするのが自然である。(2) は (2, 2) に到達する道が 3 通りある点を落としやすい。(3) は $a = b$ の対称性で $p = r$ とし、中央の確率 $q^2 + 2p^2$ が他の 4 点より大きいことを不等式で示す。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合した。高校数学の範囲内で完結させた。