

九州大学 1994 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、最高次の係数が 1 の 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフ C を考える。そして、恒等変換ではない 1 次変換 $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$ による C の像は C に一致するとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 3 次関数の係数 a, b, c および 1 次変換の係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれどのようなものでなければならないか。
- (2) 上記の 3 次関数が $x = x_0$ で極大値 y_0 を持つ場合、関数ごとに定まる xy 平面の点 (x_0, y_0) の全体はいかなる曲線上にあるか。

▶ 解法 1

【方針】

曲線上の点を $(x, x^3 + ax^2 + bx + c)$ とおき、変換後の座標が再び同じ 3 次関数のグラフ上を動く条件を係数比較に直す。まず x' に y が含まれると x' が x^3 程度になり、グラフ条件の右辺が $(x')^3$ で x^9 程度になってしまうため $\beta = 0$ と分かる。その後は $x' = \alpha x$ として係数を比較し、恒等変換ではないことから $\alpha \neq 1$ を使う。(2) は得られた関数 $y = x^3 + bx$ の極大条件 $b < 0$ を確認し、極大点を媒介変数で表して関係式を消去する。

【解答】

(1)

曲線 C 上の点は $(x, y) = (x, x^3 + ax^2 + bx + c)$ と表される。変換後の第 1 座標は $x' = \alpha x + \beta y = \alpha x + \beta(x^3 + ax^2 + bx + c)$ である。

もし $\beta \neq 0$ なら、 $|x|$ が大きいとき x' は x^3 程度の大きさになる。一方、第 2 座標 $y' = \gamma x + \delta y$ は高くても x^3 程度である。同じ 3 次関数のグラフ上にあるなら $y' = (x')^3 + a(x')^2 + bx' + c$ を満たす必要があるが、右辺は $(x')^3$ により x^9 程度になってしまい、左辺と次数が合わない。したがって $\beta = 0$ である。

このとき $x' = \alpha x$ である。変換後の点全体が同じ曲線上を動くので、 $\alpha = 0$ はありえない。また、恒等変換ではないため、あとで $\alpha = 1$ は除く。

曲線上の任意の x について

$$\gamma x + \delta(x^3 + ax^2 + bx + c) = (\alpha x)^3 + a(\alpha x)^2 + b(\alpha x) + c$$

が成り立つ。係数を比較すると $\delta = \alpha^3, a\delta = a\alpha^2, \gamma + b\delta = b\alpha, c\delta = c$ である。 $\delta = \alpha^3$ を代入すると $a\alpha^3 = a\alpha^2, c\alpha^3 = c$ 。 $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ であるから $a = 0, c = 0$ を得る。また $\gamma + b\alpha^3 = b\alpha$ より $\gamma = b\alpha(1 - \alpha^2)$ である。

したがって必要な形は $y = x^3 + bx$ であり、変換は $x' = \alpha x, y' = b\alpha(1 - \alpha^2)x + \alpha^3 y$ である。ただし $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ で、 b は任意の実数である。

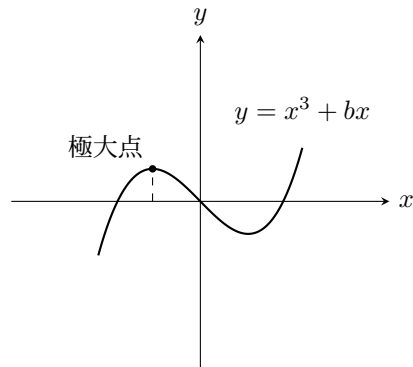
逆に、この形であれば $y = x^3 + bx$ を満たす点に対して $y' = b\alpha(1 - \alpha^2)x + \alpha^3(x^3 + bx) = \alpha^3 x^3 + b\alpha x$ であり、 $x' = \alpha x$ だから $y' = (x')^3 + bx'$ となる。よってこの条件で十分でもある。

(2)

(1) より考える 3 次関数は $y = x^3 + bx$ である。微分すると $y' = 3x^2 + b$ であるから、極値をもつには $b < 0$ が必要である。

このとき $3x^2 + b = 0$ より $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}$ である。 $y'' = 6x$ なので、極大となるのは $x_0 = -\sqrt{-\frac{b}{3}}$ の方である。 $s = \sqrt{-b/3}$ とおくと $s > 0, b = -3s^2, x_0 = -s$ である。このとき $y_0 = (-s)^3 + (-3s^2)(-s) = -s^3 + 3s^3 = 2s^3$ 。一方、 $x_0 = -s$ だから $-2x_0^3 = -2(-s)^3 = 2s^3$ 。したがって $y_0 = -2x_0^3, x_0 < 0$ である。

よって、点 (x_0, y_0) の全体は曲線 $y = -2x^3$ のうち $x < 0$ の部分上にある。



▶ 解法 2

【方針】

次数比較で $x' = \alpha x$ を確定した後、3 次曲線にただ一つある変曲点に変換で保たれることを使う。変曲点の x 座標と y 座標を順に比較して $a = c = 0$ を幾何的に導き、残る係数と極大点の軌跡を求める。

【解答】

(1)

$$F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく。曲線上の点は $(x, F(x))$ であるから、像の第一座標は

$$x' = \alpha x + \beta F(x).$$

$\beta \neq 0$ なら x' は x の 3 次式となり、 $F(x')$ は 9 次式となる。一方、第二座標

$$y' = \gamma x + \delta F(x)$$

は高々 3 次式なので一致できない。ゆえに $\beta = 0$ である。

像が曲線全体に一致するため $\alpha \neq 0$ である。また $\alpha = 1$ なら $x' = x$ であり、曲線上で $y' = F(x) = y$ となるため恒等変換である。よって $\alpha \neq 1$ である。

曲線 C の変曲点はただ一つで、その x 座標は

$$x_1 = -\frac{a}{3}$$

である。変換は C を自身へ移すので、この変曲点も自身へ移る。一方 $x' = \alpha x$ だから

$$\alpha x_1 = x_1.$$

$\alpha \neq 1$ より $x_1 = 0$ 、したがって $a = 0$ である。

このとき変曲点は $(0, c)$ である。最高次係数を比較すれば $\delta = \alpha^3$ なので、変曲点が固定される条件は

$$\alpha^3 c = c.$$

実数 α について $\alpha^3 = 1$ は $\alpha = 1$ だけであるから、 $c = 0$ となる。

残る係数は、曲線上で成り立つ恒等式

$$\gamma x + \delta F(x) = F(\alpha x)$$

の x^3, x の係数から

$$\delta = \alpha^3, \quad \gamma + b\alpha^3 = b\alpha.$$

したがって

$$a = 0, \quad c = 0, \quad \gamma = b\alpha(1 - \alpha^2), \quad \delta = \alpha^3,$$

ただし

$$b \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

逆に、この条件なら

$$y' = b\alpha(1 - \alpha^2)x + \alpha^3(x^3 + bx) = (\alpha x)^3 + b(\alpha x)$$

となるので十分でもある。

(2) 曲線は $y = x^3 + bx$ である。極大をもつには $b < 0$ が必要で、

$$3x_0^2 + b = 0, \quad x_0 < 0.$$

よって $b = -3x_0^2$ であり、

$$y_0 = x_0^3 + bx_0 = -2x_0^3.$$

したがって軌跡は

$$y = -2x^3 \quad (x < 0)$$

である。

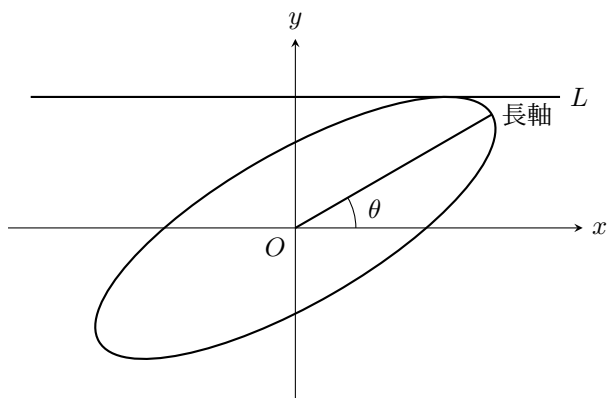
【総評】 曲線上の点を媒介変数 x で表し、変換後の次数を比較して $\beta = 0$ を確定するのが出発点である。その後の係数比較では必要条件だけで終えず、得た変換が曲線を実際に保つことも確認する。極大点の軌跡には $x < 0$ という範囲条件が必要である。

【第 2 問】

右図のように、 xy 平面上で、原点 O を中心とする、長軸の長さが 6、短軸の長さが 2 の楕円 C 、および C の上端に接する x 軸に平行な直線 L を考える。そして C は O のまわりに一定の角速度で回転しているとし、 L は C の回転ともなって上下運動をしているものとする。

(1) C の長軸と x 軸のなす角が θ のとき、 L の高さを θ の関数で表せ。

(2) L の上下する速さが最大になるときの θ を求めよ。



資料注：現存する原アーカイブには「右図」が収録されていない。下図は本文の条件から再構成した模式図であり、原図の複製ではない。

▶ 解法 1

【方針】

長半径 3、短半径 1 の楕円上の点を、長軸方向成分 u と短軸方向成分 v で表す。回転後の y 座標は $u \sin \theta + v \cos \theta$ なので、 $u^2/9 + v^2 = 1$ のもとでこの一次式の最大値を求めれば直線 L の高さになる。(2) は角速度が一定であるため、上下速度の最大は $|dh/d\theta|$ の最大と同じである。 $u = \sin^2 \theta$ と置いて 2 次式型の最大問題に直す。別解として、回転した楕円の方程式に水平接線を持たせ、判別式を 0 にする方法でも高さを求められる。

【解答】

(1)

楕円の長半径は 3、短半径は 1 である。長軸方向の座標を u 、短軸方向の座標を v とすると、楕円は $\frac{u^2}{9} + v^2 = 1$ で表される。

長軸が x 軸となす角を θ とすると、長軸方向の単位ベクトルの y 成分は $\sin \theta$ 、短軸方向の単位ベクトルの y 成分は $\cos \theta$ である。したがって点の y 座標は $y = u \sin \theta + v \cos \theta$ である。 $u = 3X$ 、 $v = Y$ とおくと $X^2 + Y^2 = 1$ であり、 $y = 3X \sin \theta + Y \cos \theta$ である。円 $X^2 + Y^2 = 1$ 上で一次式 $3X \sin \theta + Y \cos \theta$ の最大値は、係数の長さに等しいので

$$\sqrt{(3 \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} = \sqrt{9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

である。

したがって、 L の高さは $h(\theta) = \sqrt{9\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{1 + 8\sin^2\theta}$ である。

(2)

楕円は一定の角速度で回転するので、上下する速さは $|h'(\theta)|$ に比例する。よって $|h'(\theta)|$ を最大にすればよい。

(1) より $h(\theta) = \sqrt{1 + 8\sin^2\theta}$ であるから $h'(\theta) = \frac{8\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 + 8\sin^2\theta}}$ 。したがって $|h'(\theta)|^2 = \frac{64\sin^2\theta\cos^2\theta}{1 + 8\sin^2\theta}$ 。 $u = \sin^2\theta$ とおくと $0 \leq u \leq 1$ であり、最大にすべき式は $\frac{64u(1-u)}{1+8u}$ である。定数 64 を除き $F(u) = \frac{u(1-u)}{1+8u}$ とおく。

微分すると

$$F'(u) = \frac{(1-2u)(1+8u) - 8u(1-u)}{(1+8u)^2} = \frac{1-2u-8u^2}{(1+8u)^2}.$$

よって $F'(u) = 0$ は $8u^2 + 2u - 1 = 0$ すなわち $(4u-1)(2u+1) = 0$ である。 $0 \leq u \leq 1$ より $u = \frac{1}{4}$ で最大となる。したがって $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$ である。

長軸の向きを $0 \leq \theta < \pi$ で表すなら $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$ である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ で向きを区別して書くなら、これに $\theta = \frac{7\pi}{6}$, $\theta = \frac{11\pi}{6}$ も加わる。

▶ 解法 2

【方針】

回転した楕円の方程式へ水平線 $y = h$ を代入し、 x の 2 次方程式が重解をもつ条件から上端の高さを求める。高さの導関数を 2 乗し、 $u = \sin^2\theta$ で最大化する。

【解答】

長軸方向、短軸方向の座標をそれぞれ u, v とすると

$$\frac{u^2}{9} + v^2 = 1,$$

また、長軸が x 軸となす角が θ のとき

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad v = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

(1) 水平線 $y = h$ と楕円との交点は

$$\frac{(x \cos \theta + h \sin \theta)^2}{9} + (-x \sin \theta + h \cos \theta)^2 = 1$$

を満たす。上端で接するとき、この x の 2 次方程式の判別式は 0 である。整理すると

$$h^2 = 9\sin^2\theta + \cos^2\theta.$$

上端なので $h > 0$ を選び、

$$h(\theta) = \sqrt{1 + 8\sin^2\theta}.$$

(2) 角速度が一定なので、上下する速さの最大化は $|h'(\theta)|$ の最大化と同じである。

$$\{h'(\theta)\}^2 = \frac{64\sin^2\theta\cos^2\theta}{1 + 8\sin^2\theta}.$$

$u = \sin^2\theta$ とおけば、定数倍を除いて

$$G(u) = \frac{u(1-u)}{1+8u} \quad (0 \leq u \leq 1)$$

を最大化すればよい。

$$G'(u) = \frac{1-2u-8u^2}{(1+8u)^2}.$$

したがって最大点は $u = 1/4$ であり、

$$\sin^2\theta = \frac{1}{4}.$$

長軸の向きを $0 \leq \theta < \pi$ で表せば

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

一般にはこの二つを法 π で考えればよい。

【総評】 原アーカイブには問題文の「右図」が収録されていないため、掲載図は本文の長軸・短軸・接線条件から再構成した模式図である。支持関数で高さを求める方法と、回転楕円へ水平線を代入して判別式を 0 にする方法を示した。速さは角速度一定のため $|dh/d\theta|$ を最大化すればよい。

【第 3 問】

a, b をある実数とし,

$$I = \int_a^b e^{-x} \sin x dx, \quad J = \int_a^b e^{-x} \cos x dx$$

とする.

(1) 2 つの等式

$$I - J = e^{-a} \sin a - e^{-b} \sin b, \quad I + J = e^{-a} \cos a - e^{-b} \cos b$$

が成り立つことを示せ.

(2) n を正の整数とし, 区間 $[(n-1)\pi, n\pi]$ において, 関数 $y = e^{-x} \sin x$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積 A_n を求めよ.

(3) A_n ($n = 1, 2, \dots$) の総和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $e^{-x} \sin x$ と $e^{-x} \cos x$ を微分し, $I - J, I + J$ の形に合わせる。(2) では各区間で $\sin x$ の符号が一定なので, 符号を見て絶対値付きの積分にする。原始関数で直接計算してもよいし, (1) の等式に端点を代入して I を求めてもよい。(3) は A_n が公比 $e^{-\pi}$ の等比数列になることを確認して和を取る。

【解答】

(1)

まず

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} \sin x) = e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

である。したがって

$$I - J = \int_a^b e^{-x}(\sin x - \cos x) dx = - \int_a^b \frac{d}{dx}(e^{-x} \sin x) dx$$

であるから $I - J = e^{-a} \sin a - e^{-b} \sin b$. また

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} \cos x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

である。よって

$$I + J = \int_a^b e^{-x}(\sin x + \cos x) dx = - \int_a^b \frac{d}{dx}(e^{-x} \cos x) dx$$

となり $I + J = e^{-a} \cos a - e^{-b} \cos b$ を得る。

(2)

区間 $[(n-1)\pi, n\pi]$ では $\sin x$ の符号は一定である。したがって面積は

$$A_n = \left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x dx \right|$$

である。

原始関数は

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

である。よって

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi} \right)$$

となる。絶対値を取れば

$$A_n = \frac{1}{2} \left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi} \right) = \frac{1+e^\pi}{2} e^{-n\pi}.$$

(3)

(2) より $A_n = \frac{1+e^\pi}{2} e^{-n\pi}$ である。したがって

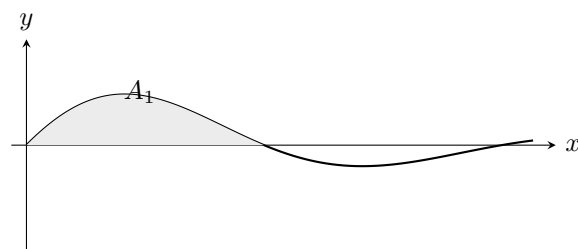
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1+e^\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi}.$$

ここで $0 < e^{-\pi} < 1$ なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

よって

$$S = \frac{1+e^\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}.$$



▶ 解法 2

【方針】

$e^{(-1+i)x}$ の実部・虚部を用いて I, J を一度に計算する。端点が整数倍の π の場合へ代入し、絶対値で各面積を得て等比級数を足す。

【解答】

$$K = \int_a^b e^{(-1+i)x} \, dx$$

とおくと

$$K = J + iI.$$

(1)

$$\begin{aligned} K &= \left[\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} \right]_a^b \\ &= -\frac{1+i}{2} \left(e^{-b}(\cos b + i \sin b) - e^{-a}(\cos a + i \sin a) \right). \end{aligned}$$

実部と虚部を比較して整理すると

$$I - J = e^{-a} \sin a - e^{-b} \sin b,$$

$$I + J = e^{-a} \cos a - e^{-b} \cos b.$$

(2) $a = (n-1)\pi, b = n\pi$ とする。端点で正弦は 0 なので第一式から $I = J$ である。第二式と合わせると

$$2I = (-1)^{n-1} (e^{-(n-1)\pi} + e^{-n\pi}).$$

区間内で正弦の符号は一定だから

$$A_n = |I| = \frac{1}{2} (e^{-(n-1)\pi} + e^{-n\pi}).$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}. \end{aligned}$$

【総評】 微分公式から二式を別々に導く方法と、複素指数で二積分を同時に扱う方法を示した。面積では定積分そのものではなく絶対値を取る。 A_n を $e^{-(n-1)\pi}$ の形に揃えると、初項と公比を取り違えずに無限等比級数を計算できる。

【第 4 問】

半径が r の円筒形の容器 V が軸を垂直にして置かれており、 V の上面からは水が流入し、 V の底面からは水が流出しているとする。その流入速度は一定値 a であるが、流出速度は V にたまった水の深さに比例（比例定数 b ）しているものとする。

- (1) 時刻 t における水の深さを $f(t)$ とするとき、 t の関数 $f(t)$ はいかなる微分方程式を満たすか。
- (2) $f(0) = 0$ としたとき、水が V の上面からあふれださないためには、 V の高さがどれくらいあればよいか。

▶ 解法 1

【方針】

水量を $\pi r^2 f(t)$ と表し、その時間変化を「流入速度 a から流出速度 $bf(t)$ を引いたもの」として微分方程式を立てる。(2) では初期条件 $f(0) = 0$ を用いて一次微分方程式を解き、深さが単調に a/b に近づくことを確認する。有限時刻では a/b 未満で、限界値が a/b なので、容器の高さは少なくとも a/b 必要である。

【解答】

(1)

時刻 t における水の深さが $f(t)$ であるから、容器内の水量は $\pi r^2 f(t)$ である。単位時間あたりの流入量は a 、流出量は水の深さに比例して $bf(t)$ である。したがって水量の増加速度は $a - bf(t)$ である。

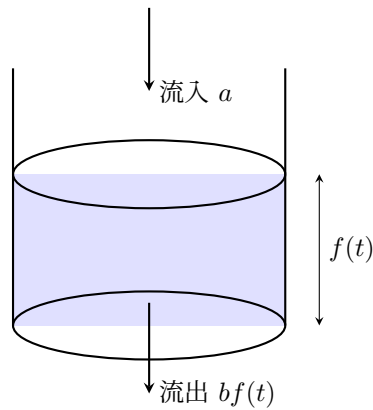
よって $\frac{d}{dt}\{\pi r^2 f(t)\} = a - bf(t)$ であり、求める微分方程式は $\pi r^2 f'(t) = a - bf(t)$ である。

(2)

(1) の式を $f'(t) + \frac{b}{\pi r^2} f(t) = \frac{a}{\pi r^2}$ と書く。定数解は $f(t) = a/b$ であるから $g(t) = f(t) - \frac{a}{b}$ とおくと $g'(t) + \frac{b}{\pi r^2} g(t) = 0$ となる。したがって $g(t) = Ce^{-bt/(\pi r^2)}$ である。

初期条件 $f(0) = 0$ より $g(0) = -\frac{a}{b}$ であるから $f(t) = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt/(\pi r^2)})$ である。

ここで $t \geq 0$ では $0 \leq 1 - e^{-bt/(\pi r^2)} < 1$ であり、 t が大きくなると $f(t) \rightarrow \frac{a}{b}$ である。したがって水があふれださないためには、容器の高さが $\frac{a}{b}$ 以上あればよい。最小限の高さは $\frac{a}{b}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

平衡水深 a/b に対する差 $a/b - f(t)$ を変数として分離形で解く。微分方程式の立式、単調性、上限と極限から必要十分な容器の高さを判定する。

【解答】

(1) 水量は $\pi r^2 f(t)$ である。したがって、流入量から流出量を引いて

$$\pi r^2 f'(t) = a - bf(t).$$

(2) 平衡水深との差

$$u(t) = \frac{a}{b} - f(t)$$

を考える。(1) から

$$u'(t) = -\frac{b}{\pi r^2} u(t).$$

変数分離して

$$\frac{du}{u} = -\frac{b}{\pi r^2} dt.$$

初期条件 $f(0) = 0$ 、すなわち $u(0) = a/b$ を使うと

$$u(t) = \frac{a}{b} \exp\left(-\frac{bt}{\pi r^2}\right).$$

よって

$$f(t) = \frac{a}{b} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{bt}{\pi r^2}\right) \right\}.$$

$f(t)$ は単調に増加し、任意の有限時刻では a/b 未満、極限は a/b である。したがって、あふれないための容器の高さ H の必要十分条件は

$$H \geq \frac{a}{b}.$$

【総評】 水量の変化率は深さではなく $\pi r^2 f(t)$ の微分である。平衡水深 a/b との差を取ると分離形になり、解の単調増加と上限が同時に見える。水深は有限時刻には a/b に達しないが極限で近づくため、容器高は a/b 以上が必要十分である。