

九州大学 1995 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

原点を中心とする半径 1 の球面 S の外側に点 $A(a, b, c)$ があるとする.

- (1) 点 A を通り球面 S に接する直線は無数にある. それらの直線と S との接点の集合を E とする. 集合 E は, ある平面 H の部分集合である. 平面 H の方程式を求めよ.
- (2) 平面 H は球面 S の内部を 2 つの部分に分ける. この 2 つの部分のうち, 原点を含まない方の体積を V_1 とする. また, (1) で考えた接線の全部と平面 H とで囲まれた円錐の体積を V_2 とする. 原点と点 A との距離を r として

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{V_1}{V_2}$$

の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

接点を X とすると, 半径 OX は接線 AX と垂直である. したがって $(A - X) \cdot X = 0$ と $|X| = 1$ から平面 H が得られる. (2) では $OA = r$ とし, 平面と原点の距離 $1/r$ 、接点の円の半径、円錐の高さをすべて r で表す. 球冠の体積と円錐の体積を比較して極限を取る.

【解答】

(1)

接点を $X = (x, y, z)$ とする. 球面は原点中心、半径 1 であるから $|X| = 1$ である. また、接線 AX は半径 OX と垂直である. したがって $(A - X) \cdot X = 0$ である.

これを展開すると $A \cdot X - X \cdot X = 0$ であり、 $|X| = 1$ より $A \cdot X = 1$ となる. $A = (a, b, c)$ だから、接点はすべて平面 $ax + by + cz = 1$ 上にある. よって $H: ax + by + cz = 1$ である.

(2) $r = OA$ とする. 点 A は球面の外側にあるので $r > 1$ である. 平面 H と原点との距離は $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{r}$ である.

したがって、原点を含まない側の球冠の高さは $1 - \frac{1}{r}$ である.

半径 1 の球で、高さ h の球冠の体積は $\frac{\pi h^2(3-h)}{3}$ である. ここで $h = 1 - 1/r$ とすれば $V_1 = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 \left(2 + \frac{1}{r}\right)$ である.

次に円錐の体積を求める. 平面 H と球面の交わりは円であり、その半径は $\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}$ である. また、円錐の頂点は A 、底面は平面 H 上のこの円であるから、高さは $r - \frac{1}{r}$ である. よって $V_2 = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \left(r - \frac{1}{r}\right)$ である.

したがって

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 \left(2 + \frac{1}{r}\right)}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \left(r - \frac{1}{r}\right)} = \frac{2r + 1}{(r + 1)^2}$$

である. よって

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$$

である.

▶ 解法 2

【方針】

球冠の高さ $h = 1 - 1/r$ を変数にし、球冠と円錐をともに h の式へ直して極限を取る。

【解答】

(1) 接点ベクトルを $\boldsymbol{x}$ 、点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とする。接線と半径の直交から

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = 0.$$

球面上では $|\boldsymbol{x}| = 1$ なので

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 1.$$

したがって

$$H: ax + by + cz = 1.$$

(2) 球冠の高さを

$$h = 1 - \frac{1}{r}$$

とおく。すると $r = 1/(1-h)$ であり、 $r \rightarrow 1+0$ は $h \rightarrow 0+0$ に対応する。球冠の体積は

$$V_1 = \frac{\pi h^2(3-h)}{3}.$$

接点円の半径の 2 乗は

$$1 - \frac{1}{r^2} = 1 - (1-h)^2 = h(2-h),$$

円錐の高さは

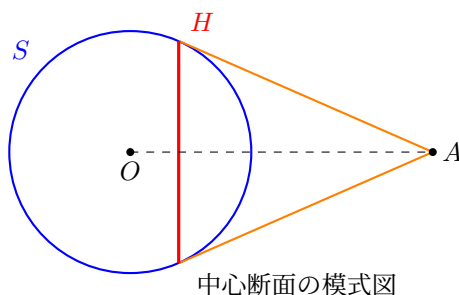
$$r - \frac{1}{r} = \frac{1}{1-h} - (1-h) = \frac{h(2-h)}{1-h}.$$

よって

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \frac{h^2(2-h)^2}{1-h}.$$

したがって

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(3-h)(1-h)}{(2-h)^2} \rightarrow \frac{3}{4}.$$



中心断面の模式図

【総評】 球面への接線の接点集合と、球冠・円錐の体積を扱う空間図形問題。難度は高めで、目安時間は 30 分前後。(1) では接線と半径の垂直条件から $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = 1$ を出すのが重要である。(2) では平面までの距離 $1/r$ 、接点円の半径、円錐の高さを混同しないことが得点上の注意点である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲、途中計算まで確認した。

【第 2 問】

θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を動くとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

を満たす点 (x, y) がえがく曲線を C とし,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

を満たす点 (x, y) がえがく曲線を C' とする.

- (1) 曲線 C と曲線 C' の概形をかけ.
- (2) 曲線 C で囲まれた図形と C' で囲まれた図形との共通部分を直線 $y = x$ のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

回転軸である直線 $y = x$ に沿う座標 $u = (x + y)/\sqrt{2}$ と、それに垂直な座標 $v = (-x + y)/\sqrt{2}$ に直す。すると 2 曲線は、長軸の向きが入れ替わった 2 つの楕円 $u^2/4 + v^2 = 1$ 、 $u^2 + v^2/4 = 1$ になる。共通部分を u 軸のまわりに回転するので、各 u での半径の 2 乗は 2 つの上端の小さい方で決まる。

【解答】

(1)

直線 $y = x$ 方向の座標を $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ とし、それに垂直な方向の座標を $v = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$ とする。

最初の曲線 C については、この座標で $u = 2 \cos \theta$, $v = \sin \theta$ となる。したがって $\frac{u^2}{4} + v^2 = 1$ である。これは直線 $y = x$ 方向に長い楕円である。

次の曲線 C' については $u = -\sin \theta$, $v = 2 \cos \theta$ となる。したがって $u^2 + \frac{v^2}{4} = 1$ である。これは直線 $y = x$ に垂直な方向に長い楕円である。

(2)

直線 $y = x$ は u 軸である。よって共通部分をこの直線のまわりに回転すると、 u ごとの断面は円になる。

曲線 C の内部では $v^2 \leq 1 - \frac{u^2}{4}$ であり、曲線 C' の内部では $v^2 \leq 4(1 - u^2)$ である。共通部分では、この 2 つの小さい方が回転半径の 2 乗になる。

2 つの上端が等しくなるのは $1 - \frac{u^2}{4} = 4(1 - u^2)$ のときであり、整理して $u^2 = \frac{4}{5}$ である。 $|u| \leq 2/\sqrt{5}$ では $1 - u^2/4$ の方が小さく、 $2/\sqrt{5} \leq |u| \leq 1$ では $4(1 - u^2)$ の方が小さい。

したがって体積は

$$V = \pi \int_{-2/\sqrt{5}}^{2/\sqrt{5}} \left(1 - \frac{u^2}{4}\right) du + 2\pi \int_{2/\sqrt{5}}^1 4(1 - u^2) du$$

である。計算すると

$$\int_{-2/\sqrt{5}}^{2/\sqrt{5}} \left(1 - \frac{u^2}{4}\right) du = \frac{56}{15\sqrt{5}}$$

であり、

$$2 \int_{2/\sqrt{5}}^1 4(1 - u^2) du = \frac{16}{3} - \frac{176}{15\sqrt{5}}$$

である。よって

$$V = \pi \left(\frac{16}{3} - \frac{120}{15\sqrt{5}} \right) = \frac{8\pi(10 - 3\sqrt{5})}{15}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

まず C が作る楕円体全体の体積を出し、 C' から外れる左右の部分を差し引く。

【解答】

(1)

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

とすると

$$C: \frac{u^2}{4} + v^2 = 1, \quad C': u^2 + \frac{v^2}{4} = 1.$$

すなわち、 u 軸方向と v 軸方向に長軸をもつ 2 楕円である。

(2)

楕円体から不要部分を引く。

C の内部を u 軸のまわりに回転した楕円体の体積は

$$V_C = \frac{4\pi}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8\pi}{3}.$$

両楕円の半径が一致する位置を

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

とおく。 $|u| \leq a$ では C の方が細いので、そのまま共通部分になる。一方、 $a < |u| \leq 1$ では C' の方が細く、 $1 < |u| \leq 2$ では共通部分がない。

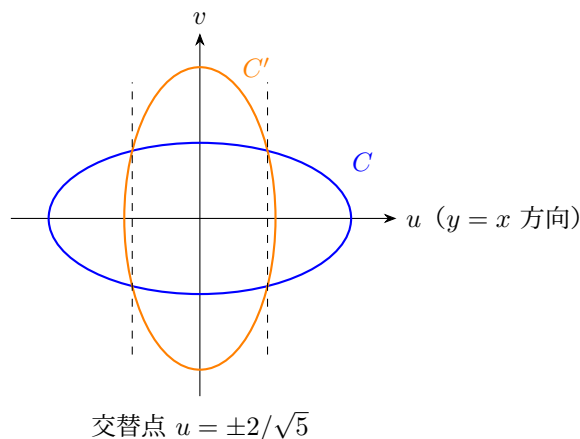
よって C の楕円体から左右の不要部分を引けば

$$\begin{aligned} V &= \frac{8\pi}{3} - 2\pi \int_a^1 \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{4}\right) - 4(1 - u^2) \right\} du \\ &\quad - 2\pi \int_1^2 \left(1 - \frac{u^2}{4}\right) du. \end{aligned}$$

計算すると

$$V = \pi \left(\frac{16}{3} - \frac{8}{\sqrt{5}} \right) = \frac{8\pi(10 - 3\sqrt{5})}{15}.$$

解法 1 の「小さい半径を直接積分する」方法と同じ値になる。



【総評】 回転した 2 つの楕円の共通部分を、軸に沿う座標で整理する問題。難度は高く、目安時間は 35 分前後。座標 u, v を導入すれば、回転軸が u 軸になり、体積は一変数の断面積積分になる。共通部分では半径を「小さい方」で取るため、 $u^2 = 4/5$ で積分範囲を分けることが最大の注意点である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲、途中計算まで確認した。

【第 3 問】

次の問に答えよ。

(1) x の関数

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - |x|$$

が与えられている。 a を実数とすると、

$$g(a) = \int_0^1 f_1(x) f_2(x+a) dx$$

を計算せよ。

(2) 上記の $g(a)$ の値を最大にする a およびそのときの $g(a)$ の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$f_2(x+a) = 1 - |x+a|$ なので、区間 $0 \leq x \leq 1$ で $x+a$ の符号が変わるかどうかで $a \geq 0$ 、 $a \leq -1$ 、 $-1 < a < 0$ に分ける。各範囲で絶対値を外して積分し、得られた一次式または三次式の最大値を比較する。中央範囲では微分して候補を出し、端点値とも比べる。

【解答】

(1)

$$g(a) = \int_0^1 x \{1 - |x+a|\} dx$$

である。 $x+a$ の符号で場合分けする。

まず $a \geq 0$ のときは、 $0 \leq x \leq 1$ で $x+a \geq 0$ である。したがって

$$g(a) = \int_0^1 x(1-x-a) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{a}{2} = \frac{1}{6} - \frac{a}{2}$$

である。

次に $a \leq -1$ のときは、 $0 \leq x \leq 1$ で $x+a \leq 0$ である。したがって

$$g(a) = \int_0^1 x(1+x+a) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{a}{2} = \frac{5}{6} + \frac{a}{2}$$

である。

最後に $-1 < a < 0$ のときは、 $x = -a$ で符号が変わる。よって

$$g(a) = \int_0^{-a} x(1+x+a) dx + \int_{-a}^1 x(1-x-a) dx$$

である。計算すると $g(a) = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{6}$ となる。

したがって

$$g(a) = \begin{cases} \frac{5}{6} + \frac{a}{2} & (a \leq -1), \\ \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{6} & (-1 < a < 0), \\ \frac{1}{6} - \frac{a}{2} & (a \geq 0) \end{cases}$$

である。

(2) $a \geq 0$ では $g(a) = \frac{1}{6} - \frac{a}{2} \leq \frac{1}{6}$ である。 $a \leq -1$ では $g(a) = \frac{5}{6} + \frac{a}{2} \leq \frac{1}{3}$ である。 $-1 < a < 0$ では $g'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$ である。したがってこの範囲内の増減は、 $-1 < a < -1/\sqrt{2}$ で増加、 $-1/\sqrt{2} < a < 0$ で減少である。よって中央範囲での最大は $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

このとき $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{6}$ である。これは $1/3$ より大きいので、全体の最大値も $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$ である。最大にする a は $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

積分値を先に展開せず、絶対値の符号から $g'(a)$ を直接求めて増減と最大を決める。

【解答】

(1)

まず導関数を求める。

$a \neq -x$ では

$$\frac{\partial}{\partial a}\{1 - |x + a|\} = -\operatorname{sgn}(x + a).$$

したがって、端点では片側微分として扱えば

$$g'(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (a < -1), \\ a^2 - \frac{1}{2} & (-1 < a < 0), \\ -\frac{1}{2} & (a > 0). \end{cases}$$

実際、中央の区間では

$$g'(a) = \int_0^{-a} x \, dx - \int_{-a}^1 x \, dx = a^2 - \frac{1}{2}.$$

$g(0) = 1/6$ を基準に積分し、 $a = -1, 0$ で連続につながると

$$g(a) = \begin{cases} \frac{5}{6} + \frac{a}{2} & (a \leq -1), \\ \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{6} & (-1 < a < 0), \\ \frac{1}{6} - \frac{a}{2} & (a \geq 0). \end{cases}$$

(2) 増減は $g'(a)$ から直ちに分かる。全実数で増加から減少へ切り替わる点は

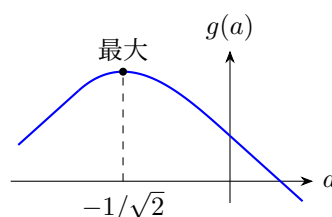
$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{6}.$$

したがって最大にする値は

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



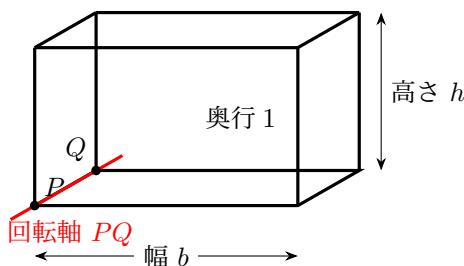
【総評】 絶対値を含む積分を、符号の変わる位置で場合分けする問題。難度は標準で、目安時間は 22 分前後。 $-1 < a < 0$ のときだけ積分区間を 2 つに分ける必要がある。最大値では中央範囲の臨界点だけでなく、 $a \leq -1$ 、 $a \geq 0$ の端での上限とも比較することが重要である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲、途中計算まで確認した。

【第 4 問】

図のように、上部のみが開いている高さ h 、幅 b 、奥行 1 の直方体容器が水平な台の上に置かれていて、中に水が一杯満たしてある。図の PQ を軸にして容器をゆっくり回転させ、水を容器の外に流出させる。台と容器の底面とのなす角を θ とする。

(1) 容器に残っている水の体積 V を θ 、 b 、 h を用いて表せ。

(2) 時刻 t における角度 θ が $\theta = \omega t$ (ω は正の定数) で表されるとき、水の流出体積速度 $f = -\frac{dV}{dt}$ を求め、 f が最大となるときの値を ω 、 b 、 h を用いて表せ。



※原典アーカイブに図版が含まれていないため、本文条件だけから容器と回転軸の関係を再構成した模式図。

▶ 解法 1

【方針】

奥行が 1 なので、側面の断面積をそのまま体積として扱う。容器を傾けると、水面は水平で、容器に固定した断面では傾き $-\tan \theta$ の直線になる。水面が右側の底まで届く前は流出部分が三角形、届いた後は残る水が三角形になるので、 $\tan \theta = h/b$ を境に場合分けする。(2) は $\theta = \omega t$ を用いて $-dV/dt$ を計算し、境目で最大になることを確認する。

【解答】

(1)

容器の奥行は 1 なので、側面から見た断面積がそのまま体積になる。容器を角 θ だけ傾けると、水面は水平のままであり、容器に固定した座標で見ると傾き $-\tan \theta$ の直線になる。

まず $0 \leq \tan \theta \leq \frac{h}{b}$ のときを考える。このとき流出した部分は、幅 b 、高さ $b \tan \theta$ の三角形である。したがって残っている水の体積は $V = bh - \frac{1}{2}b \cdot b \tan \theta = bh - \frac{1}{2}b^2 \tan \theta$ である。

次に $\tan \theta \geq \frac{h}{b}$ のとき、水は容器の底側に三角形状に残る。高さは h 、底辺は $\frac{h}{\tan \theta}$ であるから $V = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{h}{\tan \theta} = \frac{h^2}{2 \tan \theta}$ である。

よって

$$V = \begin{cases} bh - \frac{1}{2}b^2 \tan \theta & \left(0 \leq \tan \theta \leq \frac{h}{b}\right), \\ \frac{h^2}{2 \tan \theta} & \left(\tan \theta \geq \frac{h}{b}\right) \end{cases}$$

である。

(2) $\theta = \omega t$ なので $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ である。まず $0 \leq \tan \theta \leq h/b$ では $V = bh - \frac{1}{2}b^2 \tan \theta$ だから $f = -\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}b^2 \omega \frac{1}{\cos^2 \theta}$ である。

次に $\tan \theta \geq h/b$ では $V = \frac{h^2}{2} \cot \theta$ だから $f = -\frac{dV}{dt} = \frac{h^2 \omega}{2 \sin^2 \theta}$ である。

前半の式 $\frac{1}{2}b^2 \omega \frac{1}{\cos^2 \theta}$ は θ とともに増加し、後半の式 $\frac{h^2 \omega}{2 \sin^2 \theta}$ は θ とともに減少する。したがって最大は境目 $\tan \theta = \frac{h}{b}$ のときに生じる。

このとき $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{h^2}{b^2}$ であるから、最大値は

$$\frac{1}{2} b^2 \omega \left(1 + \frac{h^2}{b^2} \right) = \frac{\omega}{2} (b^2 + h^2)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

傾きを $u = \tan \theta$ とおき、残水量と流出速度を同じ変数で場合分けして単調性を比較する。

【解答】

(1)

$u = \tan \theta$ で形を統一する。

容器に固定した断面で水面を見ると、その傾きの大きさは

$$u = \tan \theta$$

である。水面が底の反対側の端に達する境界は $bu = h$ 、すなわち $u = h/b$ である。

$0 \leq u \leq h/b$ では、こぼれた三角形の面積が $b^2 u/2$ だから

$$V = bh - \frac{b^2 u}{2}.$$

$u \geq h/b$ では、残る三角形の底辺が h/u だから

$$V = \frac{h^2}{2u}.$$

よって

$$V = \begin{cases} bh - \frac{b^2}{2} \tan \theta & \left(0 \leq \tan \theta \leq \frac{h}{b} \right), \\ \frac{h^2}{2 \tan \theta} & \left(\tan \theta \geq \frac{h}{b} \right). \end{cases}$$

(2)

$$\frac{du}{dt} = \omega(1 + u^2)$$

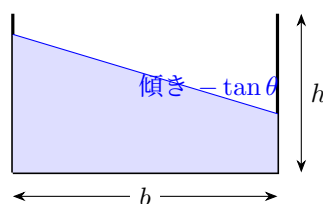
だから

$$f = -\frac{dV}{du} \frac{du}{dt} = \begin{cases} \frac{\omega b^2}{2} (1 + u^2) & \left(0 \leq u \leq \frac{h}{b} \right), \\ \frac{\omega h^2}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) & \left(u \geq \frac{h}{b} \right). \end{cases}$$

前者は増加、後者は減少するので、最大は $u = h/b$ で生じる。したがって

$$f_{\max} = \frac{\omega}{2} (b^2 + h^2).$$

容器固定座標での水面



【総評】 傾けた容器の残水量を断面積で表し、流出速度を微分で求める問題。難度は高めで、目安時間は 30 分前後。水面が容器の右下端に達する前後で図形が変わるため、 $\tan \theta = h/b$ を境にした場合分けが不可欠である。体積を出した後は、 $d\theta/dt = \omega$ を忘れずに使い、前半は増加、後半は減少することから最大が境目にあると示す。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲、途中計算まで確認した。