

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 1996 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

t を正の実数とする．曲線 $y = x^2$ 上の相異なる 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(s, s^2)$ に対し，点 P におけるこの曲線の法線 h と線分 PQ の垂直二等分線 l との交点を R とする．

- (1) 点 Q を点 P に限りなく近づけるとき，点 R はある点 R_0 に限りなく近づく．その点 R_0 の座標を求めよ．
- (2) 点 R_0 を中心とし線分 R_0P の長さを半径とする円 K と曲線 $y = x^2$ の共有点のうち， P 以外の点 P' の座標を求めよ．
- (3) 3 点 P , R_0 , P' が同一直線上にあるとき，円 K の内部のうちで $y \leq x^2$ となる部分の面積を求めよ．

第 2 問

次の行列 A で表される 1 次変換によって、点 O を原点とする座標平面上の点 $P(1, 1)$ が点 Q に移されたとする。

$$A = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ b \sin \theta & b \cos \theta \end{pmatrix}$$

ただし、 θ は実数で、 a, b はともに正の定数である。

(1) 点 O, P, Q が同一直線上にあるとき、線分 OQ の長さを a と b を用いて表せ。

(2) 3 点 O, P, Q が三角形をなすとき、その面積を S とする。 $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき、面積 S を θ の関数とみてその最大値を求めよ。

第 3 問

$\theta \left(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$ を媒介変数として

$$x = a \cos 2\theta, \quad y = b \sin 3\theta$$

で表される曲線 C がある. ただし, a, b はともに正の定数である.

- (1) 曲線 C で囲まれる部分の面積 S を求めよ.
- (2) 曲線 C 上の点で $F = x + y$ を最大とする θ を θ_0 とする. $\sin \theta_0$ を a と b を用いて表せ.

第 4 問

T を正の定数とする. $0 \leq t$ で定義された連続関数 $y(t)$ は, $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$kT < t < \left(k + \frac{1}{2}\right)T \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} + y = 1$$

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)T < t < (k+1)T \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} + y = 0$$

のように交互に 2 つの微分方程式を満たす.

$$y(kT) = \lim_{t \rightarrow kT-0} y(t) = \lim_{t \rightarrow kT+0} y(t)$$

$$y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right) = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)T-0} y(t) = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)T+0} y(t)$$

を考慮して, 以下の問に答えよ.

- (1) $y(kT)$ と $y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right)$ の間の関係式および $y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right)$ と $y((k+1)T)$ の間の関係式を求めよ.
- (2) $y(kT)$ と $y((k+1)T)$ の間の関係式を導き, $y(0) = 0$ としたときの $y(kT)$ を k と T を用いて表せ.
- (3) 極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT)$ を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)