

九州大学 1996 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

t を正の実数とする. 曲線 $y = x^2$ 上の相異なる 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(s, s^2)$ に対し, 点 P におけるこの曲線の法線 h と線分 PQ の垂直二等分線 l との交点を R とする.

- (1) 点 Q を点 P に限りなく近づけると, 点 R はある点 R_0 に限りなく近づく. その点 R_0 の座標を求めよ.
- (2) 点 R_0 を中心とし線分 R_0P の長さを半径とする円 K と曲線 $y = x^2$ の共有点のうち, P 以外の点 P' の座標を求めよ.
- (3) 3 点 P , R_0 , P' が同一直線上にあるとき, 円 K の内部のうちで $y \leq x^2$ となる部分の面積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は点 P の法線と、 PQ の垂直二等分線をそれぞれ式にし、交点を $s \rightarrow t$ で極限に送る。(2) は中心 R_0 、半径 R_0P の円に $y = x^2$ を代入し、 $(x-t)^3(x+3t)$ の因数分解で接点以外を得る。(3) は同一直線条件から t を決め、円と放物線で囲まれる該当部分を区間ごとの積分に分けて面積を求める。

【解答】

(1) 曲線 $y = x^2$ の点 $P(t, t^2)$ における接線の傾きは $2t$ である。 $t > 0$ なので法線 h の傾きは $-1/(2t)$ であり、 $y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$ である。

次に $Q(s, s^2)$ とする。線分 PQ の中点は $\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s^2+t^2}{2}\right)$ であり、直線 PQ の傾きは $\frac{s^2-t^2}{s-t} = s+t$ である。したがって垂直二等分線 l は $y - \frac{s^2+t^2}{2} = -\frac{1}{s+t}\left(x - \frac{s+t}{2}\right)$ である。

この二直線を連立して交点 R を求めると

$$R = \left(-s^2t - 2st^2 - t^3, \frac{s^2}{2} + st + \frac{3t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

である。 $s \rightarrow t$ とすると $R_0\left(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}\right)$ を得る。

(2) 円 K の中心は R_0 で、半径は R_0P である。放物線上の点を (x, x^2) とおくと、円 K 上にある条件は

$$(x + 4t^3)^2 + \left(x^2 - 3t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = (t + 4t^3)^2 + \left(t^2 - 3t^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

である。右辺は点 P での半径の二乗である。

この式を整理すると $(x-t)^3(x+3t) = 0$ となる。 $x = t$ は接点 P に対応するので、 P 以外の共有点は $x = -3t$ である。したがって $P'(-3t, 9t^2)$ である。

(3) 直線 PP' の傾きは $\frac{9t^2 - t^2}{-3t - t} = -2t$ である。一方、点 P における法線の傾きは $-1/(2t)$ である。3 点 P, R_0, P' が同一直線上にあるためには $-2t = -\frac{1}{2t}$ でなければならない。 $t > 0$ だから $t = \frac{1}{2}$ である。

このとき

$$R_0\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad P'\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

である。円の半径は $R_0P = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ であり、円の方程式は $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 2$ である。

求める部分は、円の内部で放物線 $y = x^2$ の下側にある部分である。 $u = x + 1/2$ と置くと、円に由来する面積は

$$2 \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \sqrt{2-u^2} du + \int_{-1}^1 \sqrt{2-u^2} du$$

となる。被積分関数は偶関数なので、これは

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-u^2} du = \pi$$

であり、半径 $\sqrt{2}$ の半円の面積に等しい。また放物線側の補正は

$$\int_{-3/2}^{1/2} \left(x^2 - \frac{5}{4} \right) dx = -\frac{4}{3}$$

である。よって面積は

$$\pi - \frac{4}{3}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は $Q = P(t+h)$ と置き、中心から二点までの距離が等しい条件を h の二次まで正確に比較して極限中心を得る。(2) は円と放物線の交点式を因数分解する。(3) は円由来の積分を半円の面積へまとめ、逆三角関数を使わずに求める。

【解答】

(1) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ とする。極限点 R_0 は点 P の法線上にあるので

$$R_0 - \mathbf{r}(t) = \lambda(-2t, 1)$$

と書ける。 $Q = \mathbf{r}(t+h)$ とし、 $R_0P = R_0Q$ の極限条件を使う。

$$\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t) = h(1, 2t) + h^2(0, 1).$$

距離の二乗の差

$$|R_0 - \mathbf{r}(t+h)|^2 - |R_0 - \mathbf{r}(t)|^2$$

を展開する。 h の一次項は法線条件により 0 で、 h^2 の係数から

$$-2\lambda + (1 + 4t^2) = 0.$$

よって $\lambda = (1 + 4t^2)/2$ であり、

$$R_0 = (t, t^2) + \frac{1 + 4t^2}{2}(-2t, 1)$$

だから

$$R_0 \left(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2} \right).$$

(2) 放物線上の点 (x, x^2) が円 K 上にある条件を、点 P に対する同じ条件から引いて整理すると

$$(x-t)^3(x+3t) = 0.$$

$x = t$ は接点 P であるから、もう一つの共有点は

$$P'(-3t, 9t^2).$$

(3) PP' の傾きは $-2t$ 、法線 PR_0 の傾きは $-1/(2t)$ である。同一直線条件から $t = 1/2$ 。したがって

$$R_0 \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right), \quad P \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \quad P' \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right).$$

円は

$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{5}{4} \right)^2 = 2$$

である。 $u = x + 1/2$ と置くと、円に由来する面積は

$$2 \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \sqrt{2-u^2} du + \int_{-1}^1 \sqrt{2-u^2} du.$$

被積分関数は偶関数だから、これは

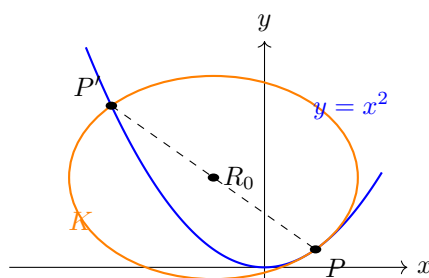
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-u^2} du = \pi$$

すなわち半径 $\sqrt{2}$ の半円の面積である。一方、放物線側の補正は

$$\int_{-3/2}^{1/2} \left(x^2 - \frac{5}{4} \right) dx = -\frac{4}{3}.$$

よって求める面積は

$$\pi - \frac{4}{3}.$$



【総評】 放物線の法線、曲率円に近い円、面積計算までつながる重めの後期問題。目安時間は 40 分。(1) の交点計算を省くと後続の信頼性が落ちるため、垂直二等分線の式を明示したい。(3) は同一直線条件で $t = 1/2$ を出したあと、どの x 区間で円全体を取るのかを図形的に整理することが最大の失点防止になる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲まで確認した。

【第 2 問】

次の行列 A で表される 1 次変換によって、点 O を原点とする座標平面上の点 $P(1, 1)$ が点 Q に移されたとする。

$$A = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ b \sin \theta & b \cos \theta \end{pmatrix}$$

ただし、 θ は実数で、 a, b はともに正の定数である。

(1) 点 O, P, Q が同一直線上にあるとき、線分 OQ の長さを a と b を用いて表せ。

(2) 3 点 O, P, Q が三角形をなすとき、その面積を S とする。 $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき、面積 S を θ の関数とみてその最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 $P(1, 1)$ の像 Q を成分で表す。(1) は O, P, Q が同一直線上、つまり Q が直線 $y = x$ 上にある条件を使い、 $(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2$ と合わせて OQ を出す。(2) は面積を行列式 $\frac{1}{2}|Q_y - Q_x|$ に直し、三角関数の合成で最大を求める。

【解答】

(1) 点 $P(1, 1)$ は、行列 A によって $Q = (a \cos \theta - a \sin \theta, b \sin \theta + b \cos \theta)$ へ移される。すなわち $Q = (a(\cos \theta - \sin \theta), b(\sin \theta + \cos \theta))$ である。

3 点 O, P, Q が同一直線上にあるとき、 P は直線 $y = x$ 上にあるので、 Q も直線 $y = x$ 上にある。したがって $a(\cos \theta - \sin \theta) = b(\sin \theta + \cos \theta)$ である。

ここで $X = \cos \theta - \sin \theta$, $Y = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと $X^2 + Y^2 = 2$ であり、同一直線条件は $aX = bY$ である。よって $X = bY/a$ として $\frac{b^2}{a^2}Y^2 + Y^2 = 2$ より $Y^2 = \frac{2a^2}{a^2 + b^2}$ である。

このとき $Q = (bY, bY)$ だから

$$OQ = \sqrt{(bY)^2 + (bY)^2} = \sqrt{2}|bY| = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である。

(2) 三角形 OPQ の面積は $S = \frac{1}{2}|1 \cdot Q_y - 1 \cdot Q_x| = \frac{1}{2}|Q_y - Q_x|$ である。ここで $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ だから $a+b = \sqrt{3}$, $b-a = -1$ である。したがって $Q_y - Q_x = b(\sin \theta + \cos \theta) - a(\cos \theta - \sin \theta) = (a+b) \sin \theta + (b-a) \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ である。よって

$$S = \frac{1}{2}|\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta| = \left| \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right|$$

となる。 θ は実数全体を動くので、 $|\sin(\theta - \pi/6)|$ の最大値は 1 である。したがって $S_{\max} = 1$ である。

▶ 解法 2

【方針】

行列を「回転してから x, y 方向へ別々に拡大する変換」と読む。回転後の点を (X, Y) と置くと $X^2 + Y^2 = 2$ であり、(1) は円と直線の交点、(2) はコーシー・シュワルツの不等式で処理できる。

【解答】

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置く。すなわち

$$X = \cos \theta - \sin \theta, \quad Y = \sin \theta + \cos \theta, \quad X^2 + Y^2 = 2.$$

点 Q は (aX, bY) である。

(1) O, P, Q が同一直線上なら Q は $y = x$ 上にあるので

$$aX = bY.$$

したがって (X, Y) は円 $X^2 + Y^2 = 2$ と直線 $aX = bY$ の交点であり、

$$X^2 = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}, \quad Y^2 = \frac{2a^2}{a^2 + b^2}.$$

ゆえに

$$OQ^2 = (aX)^2 + (bY)^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2},$$

よって

$$OQ = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(2)

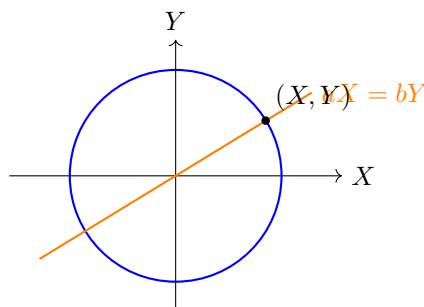
$$2S = |Q_y - Q_x| = |\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta|.$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$|\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta| \leq \sqrt{3+1} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 2.$$

等号は $(\sin \theta, \cos \theta)$ が $(\sqrt{3}, -1)$ に平行なときに実現する。したがって

$$S_{\max} = 1.$$



【総評】 一次変換で移った点の座標から、直線条件と面積を読む問題。目安時間は 24 分。(1) は Q が $y = x$ 上にある条件を使うと、 θ を直接求めずに OQ が出る。(2) は三角形の面積を $\frac{1}{2}|Q_y - Q_x|$ とするところが短縮点で、最後の振幅が 2 であることを落とさないようにしたい。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲まで確認した。

【第 3 問】

$\theta \left(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$ を媒介変数として

$$x = a \cos 2\theta, \quad y = b \sin 3\theta$$

で表される曲線 C がある。ただし、 a, b はともに正の定数である。

(1) 曲線 C で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点で $F = x + y$ を最大とする θ を θ_0 とする。 $\sin \theta_0$ を a と b を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は媒介変数表示の面積を

$$-\int y \, dx$$

で計算する。曲線の向きを確認し、 $dx/d\theta = -2a \sin 2\theta$ を代入して三角関数の積の積分に直す。(2) は $s = \sin \theta$ と置いて F を三次式にし、導関数の正の解が最大点になることを端点との比較も含めて確認する。

【解答】

(1) 媒介変数表示は $x = a \cos 2\theta$, $y = b \sin 3\theta$ である。したがって $\frac{dx}{d\theta} = -2a \sin 2\theta$ である。 $\theta = -\pi/3$ と $\theta = \pi/3$ ではどちらも $x = -a/2, y = 0$ となり、曲線は閉じている。 $-\pi/3 < \theta < 0$ では $y < 0$, $0 < \theta < \pi/3$ では $y > 0$ で、面積は

$$S = -\int_{-\pi/3}^{\pi/3} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

で与えられる。よって

$$S = 2ab \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin 3\theta \sin 2\theta \, d\theta$$

である。

積和の公式より $\sin 3\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2}(\cos \theta - \cos 5\theta)$ なので

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin 3\theta \sin 2\theta \, d\theta = \left[\sin \theta - \frac{1}{5} \sin 5\theta \right]_0^{\pi/3}$$

である。ここで $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\sin(5\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ だから

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin 3\theta \sin 2\theta \, d\theta = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

である。したがって $S = \frac{6\sqrt{3}}{5}ab$ である。

(2) 曲線上で $F = x + y = a \cos 2\theta + b \sin 3\theta$ である。 $s = \sin \theta$ とおくと、 $-\sqrt{3}/2 \leq s \leq \sqrt{3}/2$ であり、 $\cos 2\theta = 1 - 2s^2$, $\sin 3\theta = 3s - 4s^3$ だから $F = a(1 - 2s^2) + b(3s - 4s^3)$ である。

これを s で微分すると $\frac{dF}{ds} = -4as + 3b - 12bs^2$ である。臨界点は $12bs^2 + 4as - 3b = 0$ の解であり、 $s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 9b^2}}{6b}$

である。正の解を $s_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2} - a}{6b}$ とする。 $F'(0) = 3b > 0$ であり、 $F'(\sqrt{3}/2) = -2\sqrt{3}a - 6b < 0$ なので、正の解 s_0 は範囲内にあり、そこで増加から減少に変わる。端点では $F = -a/2$ である一方、 $F(0) = a$ なので、最大点はこの正の解で与えられる。したがって $\sin \theta_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2} - a}{6b}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

曲線の上下対称性を使って上半分だけを積分する。(2) は θ で直接微分し、 $\cos \theta > 0$ を利用して $\sin \theta$ の二次方程式へ落とす。

【解答】

(1) $x(-\theta) = x(\theta)$ 、 $y(-\theta) = -y(\theta)$ なので曲線は x 軸対称である。 $0 \leq \theta \leq \pi/3$ では上半分を描き、 x は a から $-a/2$ へ減少する。よって

$$S = 2 \int_0^{\pi/3} y \left(-\frac{dx}{d\theta} \right) d\theta = 4ab \int_0^{\pi/3} \sin 3\theta \sin 2\theta d\theta.$$

積和公式から

$$\int_0^{\pi/3} \sin 3\theta \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \theta - \frac{1}{5} \sin 5\theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{10}.$$

したがって

$$S = \frac{6\sqrt{3}}{5} ab.$$

(2)

$$F(\theta) = a \cos 2\theta + b \sin 3\theta$$

を直接微分すると

$$F'(\theta) = -2a \sin 2\theta + 3b \cos 3\theta.$$

$\cos \theta > 0$ であり、

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 3\theta = \cos \theta (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

だから、 $s = \sin \theta$ として

$$F'(\theta) = \cos \theta \{3b - 4as - 12bs^2\}.$$

臨界点は

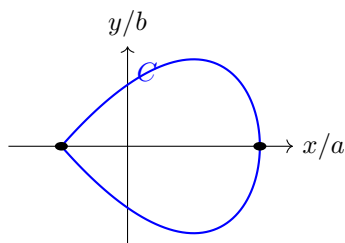
$$12bs^2 + 4as - 3b = 0$$

の解である。正の解

$$s_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2} - a}{6b}$$

で導関数は正から負へ変わり、端点の値 $-a/2$ よりも $F(0) = a$ の側で大きい。したがって最大点はこの正の解であり、

$$\sin \theta_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2} - a}{6b}.$$



【総評】 媒介変数表示の面積と三角関数の最大化を組み合わせた問題。目安時間は 30 分。(1) は曲線の向きを確認して符号を決めることが重要で、

$$-\int y dx$$

の形にすれば積分は短い。(2) は $s = \sin \theta$ への置換後、正の臨界点が本当に最大を与えることを端点と導関数の符号で確認したい。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲まで確認した。

【第 4 問】

T を正の定数とする. $0 \leq t$ で定義された連続関数 $y(t)$ は, $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$kT < t < \left(k + \frac{1}{2}\right)T \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} + y = 1$$

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)T < t < (k+1)T \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} + y = 0$$

のように交互に 2 つの微分方程式を満たす.

$$y(kT) = \lim_{t \rightarrow kT-0} y(t) = \lim_{t \rightarrow kT+0} y(t)$$

$$y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right) = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)T-0} y(t) = \lim_{t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)T+0} y(t)$$

を考慮して, 以下の間に答えよ.

- (1) $y(kT)$ と $y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right)$ の間の関係式および $y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right)$ と $y((k+1)T)$ の間の関係式を求めよ.
- (2) $y(kT)$ と $y((k+1)T)$ の間の関係式を導き, $y(0) = 0$ としたときの $y(kT)$ を k と T を用いて表せ.
- (3) 極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT)$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

各半周期で一次微分方程式を解き、連続条件によって端点値だけの関係式にする。 $q = e^{-T/2}$ と置くと、 $y((k+1)T) = q^2 y(kT) + q - q^2$ という一次漸化式になる。初期値 $y(0) = 0$ から等比数列の和で明示式を出し、最後は $0 < q < 1$ を用いて極限を取る。

【解答】

(1) $q = e^{-T/2}$ とおく。

まず $kT < t < (k+1/2)T$ では $\frac{dy}{dt} + y = 1$ である。これは $y(t) = 1 + Ce^{-t}$ の形であり、 $t = kT$ で $y(kT)$ をとるように書けば $y(t) = 1 + \{y(kT) - 1\}e^{-(t-kT)}$ である。したがって $y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right) = 1 + \{y(kT) - 1\}q$ である。

次に $(k+1/2)T < t < (k+1)T$ では $\frac{dy}{dt} + y = 0$ であるから $y(t) = y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right)e^{-\{t-(k+1/2)T\}}$ となる。よって $y((k+1)T) = q y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right)$ である。

(2) (1) の二つの式をつなげると $y((k+1)T) = q[1 + \{y(kT) - 1\}q]$ である。したがって $y((k+1)T) = q^2 y(kT) + q - q^2$ となる。 $Y_k = y(kT)$ と書くと $Y_{k+1} = q^2 Y_k + q - q^2$ である。 $Y_0 = y(0) = 0$ なので、これを繰り返して $Y_k = (q - q^2)(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(k-1)})$ となる。 $0 < q < 1$ だから $Y_k = (q - q^2) \frac{1 - q^{2k}}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q}(1 - q^{2k})$ である。 $q = e^{-T/2}$ に戻すと $y(kT) = \frac{e^{-T/2}}{1 + e^{-T/2}} \{1 - e^{-kT}\}$ である。

(3) $T > 0$ なので $0 < e^{-T} < 1$ であり、 $k \rightarrow \infty$ のとき $e^{-kT} \rightarrow 0$ である。したがって

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) = \frac{e^{-T/2}}{1 + e^{-T/2}} = \frac{1}{e^{T/2} + 1}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

各半周期の解を積分因子でつなぎ、端点値の一次漸化式を得る。その後は漸化式の不動点を先に求め、不動点との差が等比数列になることを使って明示式と極限を同時に求める。

【解答】

(1) $q = e^{-T/2}$ と置く。前半では

$$\frac{d}{dt}\{e^t(y-1)\} = 0$$

だから

$$y\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right) = 1 + \{y(kT) - 1\}q.$$

後半では $\frac{d}{dt}(e^t y) = 0$ だから

$$y((k+1)T) = qy\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)T\right).$$

(2) $Y_k = y(kT)$ と書くと

$$Y_{k+1} = q^2 Y_k + q - q^2.$$

この漸化式の不動点 L は

$$L = q^2 L + q - q^2$$

より

$$L = \frac{q}{1+q}.$$

そこで $Z_k = Y_k - L$ と置けば

$$Z_{k+1} = q^2 Z_k.$$

$Y_0 = 0$ だから $Z_0 = -L$ であり、

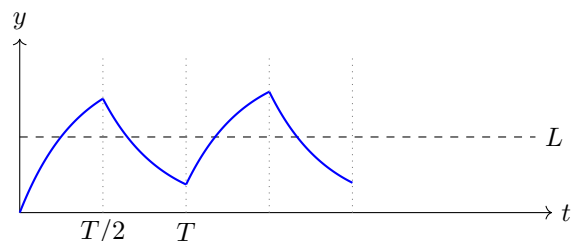
$$Y_k = L(1 - q^{2k}).$$

$q = e^{-T/2}$ に戻して

$$y(kT) = \frac{e^{-T/2}}{1 + e^{-T/2}} (1 - e^{-kT}).$$

(3) $T > 0$ より $0 < q < 1$ なので $q^{2k} \rightarrow 0$ 。したがって

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) = \frac{q}{1+q} = \frac{1}{e^{T/2} + 1}.$$



【総評】 区間ごとに微分方程式が切り替わるが、見るべき量は半周期ごとの端点値だけである。目安時間は 24 分。 $q = e^{-T/2}$ と置くと式が一気に見やすくなり、連続条件も自然に入る。(2) では初期値から等比数列の和まで書くこと、(3) では $0 < q < 1$ による収束を確認することが採点上大切である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、図示範囲まで確認した。