

入 学 試 験 問 題

数 学



九 州 大 学 1997 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

y 軸上の点 $(0, t)$ を中心とし, r を半径とする円 C (ただし, $0 < r < t$) と, 原点を通り円 C に接する直線のうち正の傾きをもつ直線 l を考える.

(1) t と r の間に

$$r = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{2}} & (0 < t \leq 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{\frac{t}{2}} & (t > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる関係がある場合, t を変化させたときの円 C と直線 l との接点の軌跡の方程式を求め, 図示せよ.

(2) 上で求めた曲線と直線 $x = 1$ および $y = \frac{1}{4}$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ.

第 2 問

数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1 = a, \quad x_n = \frac{bx_{n+1}}{1 - x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられているとき、次の問に答えよ。ただし、 a と b は正の定数とする。

(1) 一般項 x_n を求めよ。

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

を求めよ。

第 3 問

放物線 $y = \sqrt{2}x^2 - x$ と直線 $y = ax$ を考える. ただし, $a > -1$ とする. 放物線と直線との原点 O 以外の交点を P として, 放物線の O における接線と P における接線の交点を Q とおき, 線分 OQ の中点を M , 3 点 O, P, Q から等距離にある点を N とおく. このとき次の間に答えよ.

- (1) P, Q, M, N の座標を求めよ.
- (2) 線分 OM, MN の長さをそれぞれ t, s とするとき, s を t の式で表せ.
- (3) a を動かしたとき, N の描く曲線の概形を図示せよ.
- (4) 上で求めた曲線と x 軸および直線 $y = x$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

第 4 問

関数 $f(x) = x^{a+1}e^{-bx}$ (ただし, a, b は自然数) の $x \geq -1$ における最大値を M とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) $x > -1$ で定義された関数 $g(x) = \left(\frac{x+1}{c}\right)^{x+1}$ の最小値を求めよ. ただし, c は正の定数とする.
- (2) $b = 1$ のとき, すべての自然数 a に対して $M > \frac{1}{5}$ となることを示せ.
- (3) サイコロが 1 個と, 表に 1, 裏に 2 の数字が書かれているコインが 1 枚あり, これらを同時に投げる. a をこのとき出たサイコロの目の数, b をコインの数字とすると, M が $\frac{1}{5}$ 以上となる確率を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)