

九州大学 1997 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

y 軸上の点 $(0, t)$ を中心とし, r を半径とする円 C (ただし, $0 < r < t$) と, 原点を通り円 C に接する直線のうち正の傾きをもつ直線 l を考える.

(1) t と r の間に

$$r = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{2}} & (0 < t \leq 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{\frac{t}{2}} & (t > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる関係がある場合, t を変化させたときの円 C と直線 l との接点の軌跡の方程式を求め, 図示せよ.

(2) 上で求めた曲線と直線 $x = 1$ および $y = \frac{1}{4}$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

接点 $P = (x, y)$ では, 半径 $(x, y - t)$ と接線方向 (x, y) が直交する. この条件と円の方程式から, x, y を t, r で表す. 与えられた r の式により, $0 < t \leq 1$ では直線 $y = x$, $t > 1$ では放物線 $y = 2x^2$ になる. (2) では, 曲線と $y = 1/4$, $x = 1$ で囲まれる領域を, $x = 1/2$ で直線部分と放物線部分に分け, x 軸まわりのワッシャーで積分する.

【解答】

(1) 接点を $P = (x, y)$ とする. 円の中心は $(0, t)$ であるから, 半径方向のベクトルは $(x, y - t)$ であり, 原点から接点へ向かう接線方向のベクトルは (x, y) である. 半径と接線は直交するので $x^2 + y(y - t) = 0$ である. また P は円上にあるから $x^2 + (y - t)^2 = r^2$ である. これらを解くと $y = t - \frac{r^2}{t}$, $x = \frac{r\sqrt{t^2 - r^2}}{t}$ である. 正の傾きの接線を考えるので $x > 0$ をとる. $0 < t \leq 1$ では $r = t/\sqrt{2}$ であるから $x = \frac{t}{2}$, $y = \frac{t}{2}$ である. したがって軌跡は $y = x$, $0 < x \leq \frac{1}{2}$ である. $t > 1$ では $r^2 = t/2$ であるから $y = t - \frac{1}{2}$ である. また $x^2 = \frac{r^2(t^2 - r^2)}{t^2} = \frac{t - 1/2}{2}$ なので $y = 2x^2$ である. このとき $t > 1$ より $x > 1/2$ である. したがって軌跡は, $0 < x \leq 1/2$ で直線 $y = x$, $x > 1/2$ で放物線 $y = 2x^2$ をつないだ曲線である.

(2) 求める図形は, 下側が $y = 1/4$, 右端が $x = 1$, 上側が (1) で求めた曲線である. $1/4 \leq x \leq 1/2$ では上側が $y = x$, $1/2 \leq x \leq 1$ では上側が $y = 2x^2$ である.

したがって, x 軸のまわりに回転してできる体積 V は

$$V = \pi \int_{1/4}^{1/2} \left(x^2 - \frac{1}{16} \right) dx + \pi \int_{1/2}^1 \left((2x^2)^2 - \frac{1}{16} \right) dx$$

である. 計算すると

$$\int_{1/4}^{1/2} \left(x^2 - \frac{1}{16} \right) dx = \frac{1}{48}$$

であり

$$\int_{1/2}^1 \left(4x^4 - \frac{1}{16} \right) dx = \frac{119}{160}$$

となる. よって $V = \frac{367\pi}{480}$ である.

▶ 解法 2

【方針】

接線を $y = kx$ とおく。中心から直線までの距離が半径 r に等しい条件と、中心から直線へ下ろした垂線の足の公式から接点を求める。回転体は円板差を 2 区間で積分する。

【解答】

(1) $l: y = kx$ ($k > 0$) とおく。中心 $(0, t)$ から l までの距離が r だから

$$\frac{tk}{\sqrt{k^2 + 1}} = r.$$

中心から l への垂足、すなわち接点は

$$P = \left(\frac{tk}{k^2 + 1}, \frac{tk^2}{k^2 + 1} \right).$$

距離条件を用いて消去すると

$$x = \frac{r\sqrt{t^2 - r^2}}{t}, \quad y = t - \frac{r^2}{t}.$$

$0 < t \leq 1$ では $r = t/\sqrt{2}$ より

$$x = y = \frac{t}{2},$$

従って $y = x$, $0 < x \leq 1/2$ 。 $t > 1$ では $r^2 = t/2$ より

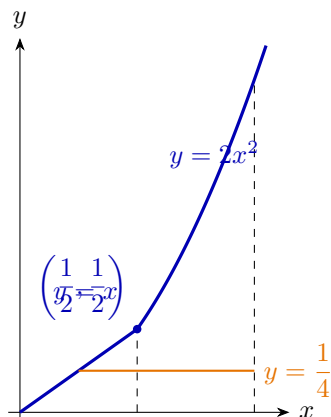
$$y = t - \frac{1}{2}, \quad x^2 = \frac{t - 1/2}{2},$$

従って

$$y = 2x^2, \quad x > \frac{1}{2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{1/4}^{1/2} \left(x^2 - \frac{1}{16} \right) dx \\ &\quad + \pi \int_{1/2}^1 \left(4x^4 - \frac{1}{16} \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{48} + \frac{119}{160} \right) \\ &= \frac{367\pi}{480}. \end{aligned}$$



【総評】 接線の接点を座標化し、軌跡を回転体の体積へつなげる問題で、目安時間は 35 分前後。接点では半径と接線が直交するため、 $(x, y - t) \cdot (x, y) = 0$ を立てるのが出発点である。軌跡は $t = 1$ を境に直線部分と放物線部分に分かれ、接点 $(1/2, 1/2)$ である。(2) では下側の直線 $y = 1/4$ を内半径として引くため、単なる

$$\pi \int y^2 dx$$

ではなく差を積分する。

【第 2 問】

数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1 = a, \quad x_n = \frac{bx_{n+1}}{1 - x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられているとき、次の問に答えよ。ただし、 a と b は正の定数とする。

- (1) 一般項 x_n を求めよ。
- (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

与式を x_{n+1} について解き、 $x_{n+1} = x_n / (b + x_n)$ とする。正の初項からすべて $x_n > 0$ なので逆数 $y_n = 1/x_n$ をとると、 $y_{n+1} = by_n + 1$ という一次漸化式になる。 $b = 1$ と $b \neq 1$ で一般項を分け、極限は $0 < b < 1$, $b = 1$, $b > 1$ で分類する。

【解答】

問題の初項を $x_1 = a$ と読む。与えられた関係 $x_n = \frac{bx_{n+1}}{1 - x_{n+1}}$ を x_{n+1} について解くと $x_n(1 - x_{n+1}) = bx_{n+1}$ より $x_{n+1} = \frac{x_n}{b + x_n}$ である。 $a > 0$, $b > 0$ なので、すべての n で $x_n > 0$ である。

(1) $y_n = \frac{1}{x_n}$ とおく。すると $y_{n+1} = \frac{b + x_n}{x_n} = by_n + 1$ であり $y_1 = \frac{1}{a}$ である。 $b = 1$ のとき $y_{n+1} = y_n + 1$ だから $y_n = \frac{1}{a} + n - 1$ である。よって $x_n = \frac{a}{1 + a(n - 1)}$ である。 $b \neq 1$ のとき、一次漸化式を解いて $y_n = b^{n-1}y_1 + 1 + b + \dots + b^{n-2}$ である。したがって $y_n = \frac{b^{n-1}}{a} + \frac{b^{n-1} - 1}{b - 1}$ であり $x_n = \frac{1}{\frac{b^{n-1}}{a} + \frac{b^{n-1} - 1}{b - 1}}$ である。

(2) $b = 1$ のとき、(1) より $y_n \rightarrow \infty$ なので $x_n \rightarrow 0$ である。 $b > 1$ のときも $b^{n-1} \rightarrow \infty$ であり、 $y_n \rightarrow \infty$ だから $x_n \rightarrow 0$ である。 $0 < b < 1$ のとき、 $b^{n-1} \rightarrow 0$ であり $\frac{b^{n-1} - 1}{b - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - b}$ だから $y_n \rightarrow \frac{1}{1 - b}$ である。よって $x_n \rightarrow 1 - b$ である。

以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 1 - b & (0 < b < 1), \\ 0 & (b \geq 1) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

漸化式を一次化する代わりに、写像 $T(x) = x/(b+x)$ の 2 つの不動点 $0, 1-b$ を使う。比 $1 - (1-b)/x_n$ は毎回 b 倍されるため、反復を直接解ける。

【解答】

与式は

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{b+x_n}$$

と同値である。

(1) $b \neq 1$ とし

$$z_n = 1 - \frac{1-b}{x_n}$$

とおく。すると

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= 1 - \frac{(1-b)(b+x_n)}{x_n} \\ &= b \left(1 - \frac{1-b}{x_n} \right) = bz_n. \end{aligned}$$

従って

$$1 - \frac{1-b}{x_n} = b^{n-1} \left(1 - \frac{1-b}{a} \right),$$

すなわち

$$x_n = \frac{a(1-b)}{a - b^{n-1}(a+b-1)} \quad (b \neq 1).$$

$b = 1$ では

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 1$$

だから

$$x_n = \frac{a}{1+a(n-1)}.$$

(2) $b \geq 1$ では上式から $x_n \rightarrow 0$ 。 $0 < b < 1$ では $b^{n-1} \rightarrow 0$ なので

$$x_n \rightarrow 1-b.$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 1-b & (0 < b < 1), \\ 0 & (b \geq 1). \end{cases}$$

【総評】 分数型の漸化式を逆数で一次漸化式に直す問題で、目安時間は 25 分前後。 $x_{n+1} = x_n/(b+x_n)$ に直すと、正の値が保たれることも分かる。 $b = 1$ では等差型、 $b \neq 1$ では等比数列の和が出るため、場合分けを省かないことが大切である。極限では $0 < b < 1$ のときだけ有限正の値 $1-b$ に近づき、 $b \geq 1$ では 0 へ近づく。

【第 3 問】

放物線 $y = \sqrt{2}x^2 - x$ と直線 $y = ax$ を考える。ただし、 $a > -1$ とする。放物線と直線との原点 O 以外の交点を P として、放物線の O における接線と P における接線の交点を Q とおき、線分 OQ の中点を M 、3 点 O, P, Q から等距離にある点を N とおく。このとき次の問に答えよ。

- (1) P, Q, M, N の座標を求めよ。
- (2) 線分 OM, MN の長さをそれぞれ t, s とするとき、 s を t の式で表せ。
- (3) a を動かしたとき、 N の描く曲線の概形を図示せよ。
- (4) 上で求めた曲線と x 軸および直線 $y = x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず放物線と直線 $y = ax$ の原点以外の交点 P を求める。放物線の O での接線は $y = -x$ 、 P での接線は微分係数 $2\sqrt{2}x - 1$ を使って書き、その交点を Q とする。 M は OQ の中点である。 N は三角形 OPQ の外心なので、 $NO = NP = NQ$ を座標で解く。(2) は $t = OM = (a+1)/4$ から $a = 4t - 1$ を代入して $s = MN$ を表す。(3),(4) は N の媒介変数表示を用い、 $-1 < a \leq 0$ の枝が x 軸と直線 $y = x$ に囲まれる部分を作ることを確認して面積を求める。

【解答】

(1) 放物線と直線 $y = ax$ の交点は $\sqrt{2}x^2 - x = ax$ すなわち $x\{\sqrt{2}x - (a+1)\} = 0$ を満たす。原点以外の交点は $x = \frac{a+1}{\sqrt{2}}$ である。したがって $P = \left(\frac{a+1}{\sqrt{2}}, \frac{a(a+1)}{\sqrt{2}}\right)$ である。

放物線 $y = \sqrt{2}x^2 - x$ の導関数は $y' = 2\sqrt{2}x - 1$ である。原点 O における接線は $y = -x$ である。また P における接線の傾きは $2\sqrt{2} \cdot \frac{a+1}{\sqrt{2}} - 1 = 2a + 1$ である。この接線と $y = -x$ の交点を求めると $Q = \left(\frac{\sqrt{2}(a+1)}{4}, -\frac{\sqrt{2}(a+1)}{4}\right)$ である。

したがって M は OQ の中点なので $M = \left(\frac{\sqrt{2}(a+1)}{8}, -\frac{\sqrt{2}(a+1)}{8}\right)$ である。

次に $N = (X, Y)$ とおく。 N は O, P, Q から等距離にあるので $NO^2 = NP^2$, $NO^2 = NQ^2$ である。これは

$$Xx_P + Yy_P = \frac{x_P^2 + y_P^2}{2}, \quad Xx_Q + Yy_Q = \frac{x_Q^2 + y_Q^2}{2}$$

と同値である。ここに P, Q の座標を代入して解くと $N = \left(\frac{\sqrt{2}(a^2 + a + 1)}{4}, \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\right)$ である。

(2) $a > -1$ なので $a+1 > 0$ である。したがって $t = OM = \frac{a+1}{4}$ である。また計算すると $s = MN = \frac{2a^2 + a + 1}{4}$ である。 $a = 4t - 1$ を代入して $s = \frac{2(4t-1)^2 + (4t-1) + 1}{4}$ を整理すると $s = 8t^2 - 3t + \frac{1}{2}$ である。

(3) (1) より、 N の軌跡は $x = \frac{\sqrt{2}(a^2 + a + 1)}{4}$, $y = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}$ ($a > -1$) で表される。 $a \rightarrow -1 + 0$ のとき $N \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ であり、この点は直線 $y = x$ 上にあるが、 $a > -1$ なので到達しない。 $a = 0$ のとき $N = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ であり、ここで x 軸と交わる。 $a > 0$ では第 1 象限を右上へ伸びる。これらをもとに概形を描けばよい。

(4) 囲まれる部分は、 $-1 < a \leq 0$ に対応する曲線の枝、 x 軸、直線 $y = x$ で囲まれる部分である。媒介変数表示 $x = \frac{\sqrt{2}(a^2 + a + 1)}{4}$, $y = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}$ を用いる。

境界を、 x 軸上の線分、曲線、直線 $y = x$ の順に回ると、直線 $y = x$ 上では $xdy - ydx = 0$ であり、 x 軸上でも寄与は 0 である。したがって面積 A は曲線部分だけから

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{-1} (x dy - y dx)$$

で求められる。ここで $dx = \frac{\sqrt{2}(2a+1)}{4} da$, $dy = \frac{\sqrt{2}a}{2} da$ だから $x dy - y dx = \frac{a^2 + 2a}{8} da$ である。よって

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{a^2 + 2a}{8} da = \frac{1}{24}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

座標を 45 度回転し、 $u = (x - y)/\sqrt{2}$, $v = (x + y)/\sqrt{2}$ とおく。この座標では $u = OM = t$, $v = MN = s$ となり、 N の軌跡は普通の放物線 $v = 8u^2 - 3u + 1/2$ になる。面積も回転で保存される。

【解答】

(1) 交点と接線を計算して

$$P = \left(\frac{a+1}{\sqrt{2}}, \frac{a(a+1)}{\sqrt{2}} \right),$$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{2}(a+1)}{4}, -\frac{\sqrt{2}(a+1)}{4} \right), \quad M = \left(\frac{\sqrt{2}(a+1)}{8}, -\frac{\sqrt{2}(a+1)}{8} \right).$$

N は三角形 OPQ の外心だから、 OQ の垂直二等分線上にある。距離条件をもう 1 本用いて

$$N = \left(\frac{\sqrt{2}(a^2 + a + 1)}{4}, \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \right).$$

(2)

$$u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

とおく。この直交座標で N は

$$u = \frac{a+1}{4}, \quad v = \frac{2a^2 + a + 1}{4}$$

となる。幾何的に $u = OM = t$, $v = MN = s$ だから $a = 4t - 1$ を代入して

$$s = 8t^2 - 3t + \frac{1}{2}.$$

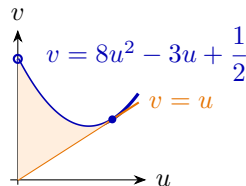
(3) $a > -1$ より $u > 0$ であり、軌跡は

$$v = 8u^2 - 3u + \frac{1}{2}, \quad u > 0.$$

$a \rightarrow -1 + 0$ の端点は $(u, v) = (0, 1/2)$ で含まず、 $a = 0$ では $(u, v) = (1/4, 1/4)$ となる。

(4) 座標回転は面積を保つ。 x 軸は $v = u$ 、 $y = x$ は $u = 0$ である。囲まれる領域では $0 \leq u \leq 1/4$ だから

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{1/4} \left(8u^2 - 3u + \frac{1}{2} - u \right) du \\ &= \left[\frac{8}{3}u^3 - 2u^2 + \frac{1}{2}u \right]_0^{1/4} \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$



【総評】 接線、外心、媒介変数曲線、面積が連続する後期らしい重い問題で、目安時間は 40 分前後。既存の式を流用せず、まず交点 P が直線 $y = ax$ との交点であることから確認する必要がある。 Q は原点での接線 $y = -x$ と P での接線の交点であり、ここを取り違えると後半が崩れる。(4) では曲線全体ではなく $-1 < a \leq 0$ の枝が囲む領域を使う。媒介変数による面積公式を使うと、計算は短くまとまる。

【第 4 問】

関数 $f(x) = x^{a+1}e^{-bx}$ (ただし、 a, b は自然数) の $x \geq -1$ における最大値を M とするとき、次の問に答えよ。

- (1) $x > -1$ で定義された関数 $g(x) = \left(\frac{x+1}{c}\right)^{x+1}$ の最小値を求めよ。ただし、 c は正の定数とする。
- (2) $b = 1$ のとき、すべての自然数 a に対して $M > \frac{1}{5}$ となることを示せ。
- (3) サイコロが 1 個と、表に 1、裏に 2 の数字が書かれているコインが 1 枚あり、これらを同時に投げる。 a をこのとき出たサイコロの目の数、 b をコインの数字とすると、 M が $\frac{1}{5}$ 以上となる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $u = x + 1 > 0$ と置いて $\log g = u \log(u/c)$ を最小化する。(2) では $b = 1$ のとき、正の側 $x = a + 1$ での値 $((a+1)/e)^{a+1}$ が e^{-1} 以上であることを (1) から示せば、最大値 M はそれ以上である。(3) では定義域が $x \geq -1$ なので、 $x = -1$ も候補になる。 $b = 2$ で a が奇数なら $a + 1$ が偶数なので $f(-1) = e^2$ となり条件を満たす。 a が偶数のときだけ正の側の最大値を比較し、失敗するのが $a = 2, b = 2$ だけであることを数える。

【解答】

(1) $u = x + 1$ とおくと、 $x > -1$ より $u > 0$ であり $g(x) = \left(\frac{u}{c}\right)^u$ である。対数をとって $\log g = u \log \frac{u}{c}$ とおく。これを u で微分すると $\frac{d}{du} \left(u \log \frac{u}{c}\right) = \log \frac{u}{c} + 1$ である。したがって最小となるのは $\log \frac{u}{c} = -1$, $u = \frac{c}{e}$ のときである。このとき $\log g = -\frac{c}{e}$ だから、最小値は $e^{-c/e}$ である。

(2) $b = 1$ とする。 $x > 0$ において $f(x) = x^{a+1}e^{-x}$ は、微分により $x = a + 1$ で最大値 $\left(\frac{a+1}{e}\right)^{a+1}$ をとる。これは (1) で $c = e$, $x = a$ としたときの値であり、(1) の最小値より $\left(\frac{a+1}{e}\right)^{a+1} \geq e^{-1}$ である。さらに $e^{-1} > \frac{1}{5}$ だから $M > \frac{1}{5}$ である。

(3) 全事象は、サイコロの目 $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ とコインの数字 $b = 1, 2$ の組で、全部で 12 通りである。

まず $b = 1$ の 6 通りは、(2) よりすべて $M > \frac{1}{5}$ を満たす。

次に $b = 2$ を考える。 a が奇数、すなわち $a = 1, 3, 5$ のとき、 $a + 1$ は偶数であるから $f(-1) = (-1)^{a+1}e^2 = e^2$ である。よってこの 3 通りは明らかに $M \geq \frac{1}{5}$ を満たす。

残りは $a = 2, 4, 6$ である。このとき $-1 \leq x \leq 0$ では $x^{a+1} \leq 0$ なので、最大値は正の側で調べればよい。 $x > 0$ での最大値は $\left(\frac{a+1}{2e}\right)^{a+1}$ である。 $a = 2$ のときは $\left(\frac{3}{2e}\right)^3 < \left(\frac{9}{16}\right)^3 < \frac{1}{5}$ である。ここでは $e > 8/3$ を用いた。したがって $(a, b) = (2, 2)$ は条件を満たさない。 $a = 4$ のときは、 $e < 3$ より $\left(\frac{5}{2e}\right)^5 > \left(\frac{5}{6}\right)^5 > \frac{1}{5}$ である。 $a = 6$ のときも $\left(\frac{7}{2e}\right)^7 > \left(\frac{7}{6}\right)^7 > \frac{1}{5}$ である。したがって $b = 2$ では 6 通りのうち 5 通りが条件を満たす。

以上より条件を満たすのは $6 + 5 = 11$ 通りである。求める確率は $\frac{11}{12}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

正の側の極大値と端点 $x = -1$ を分けて表にする。(1) の最小値評価を正の側の最大値へ適用し、 $b = 2$ では a の偶奇ごとに端点と臨界点を比較する。

【解答】

(1) $u = x + 1 > 0$ とおくと

$$\log g = u \log \frac{u}{c}.$$

微分係数は $\log(u/c) + 1$ であり、 $u = c/e$ でだけ 0 になる。従って

$$\min g = e^{-c/e}.$$

(2) $b = 1$ のとき正の側の極大値は

$$f(a+1) = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{a+1}.$$

(1) で $c = e, x = a$ とすれば

$$\left(\frac{a+1}{e}\right)^{a+1} \geq e^{-1} > \frac{1}{5}.$$

従って定義域全体の最大値 M も $1/5$ より大きい。

(3) $b = 1$ の 6 通りはすべて適する。 $b = 2$ では、 a が奇数なら

$$f(-1) = e^2 > \frac{1}{5}$$

なので 3 通りとも適する。偶数 $a = 2, 4, 6$ では負の側は正の最大値を与えず、正の側の最大値は

$$\left(\frac{a+1}{2e}\right)^{a+1}.$$

$e > 8/3, e < 3$ を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2e}\right)^3 &< \left(\frac{9}{16}\right)^3 < \frac{1}{5}, \\ \left(\frac{5}{2e}\right)^5 &> \left(\frac{5}{6}\right)^5 > \frac{1}{5}, \quad \left(\frac{7}{2e}\right)^7 > \left(\frac{7}{6}\right)^7 > \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

不適なのは $(a, b) = (2, 2)$ の 1 通りだけである。従って

$$\text{確率} = \frac{11}{12}.$$

【総評】 指数関数型の最大値と確率を組み合わせた問題で、目安時間は 35 分前後。最大値を正の側だけで判断したくなるが、定義域が $x \geq -1$ であるため、 $x = -1$ の値も必ず確認する必要がある。特に a が奇数のときは $a+1$ が偶数となり、 $f(-1) = e^b$ が大きな正の値になる。(3) ではこの点を入れると、条件を満たさないのは $(a, b) = (2, 2)$ だけであり、確率は $11/12$ になる。