

九州大学 1998 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問に答えよ。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2}a_n + a_{n+1}a_{n+1} - a_{n+1}a_n = 0$$

(1) 第 n 項 a_n を求めよ。(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

隣り合う項の比 $r_n = a_{n+1}/a_n$ を置くと、与えられた漸化式は $r_{n+1} = 1 - r_n$ という 2 周期の関係になる。初期値 $r_1 = 2$ から比が $2, -1, 2, -1, \dots$ と繰り返すことを使って、奇数番目と偶数番目の一般項を分けて求める。和は 2 項ずつ組にして等比数列の和にする。

【解答】

(1)

まず $a_1 = 1, a_2 = 2$ であり、以下で得られる式から各項は 0 にならない。そこで $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく。与えられた漸化式 $a_{n+2}a_n + a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n = 0$ を a_na_{n+1} で割ると $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = 0$ である。したがって $r_{n+1} + r_n - 1 = 0$ すなわち $r_{n+1} = 1 - r_n$ である。 $r_1 = a_2/a_1 = 2$ だから $r_2 = -1, \quad r_3 = 2, \quad r_4 = -1$ となり、以後 $r_{2j-1} = 2, \quad r_{2j} = -1$ を繰り返す。よって $a_{2j} = 2a_{2j-1}, \quad a_{2j+1} = -a_{2j}$ である。したがって $a_{2j-1} = (-2)^{j-1}, \quad a_{2j} = 2(-2)^{j-1}$ である。

(2)

2 項ずつ組にすると $a_{2j-1} + a_{2j} = (-2)^{j-1} + 2(-2)^{j-1} = 3(-2)^{j-1}$ である。したがって

$$S_{2m} = \sum_{j=1}^m 3(-2)^{j-1} = 3 \cdot \frac{1 - (-2)^m}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^m$$

である。また $S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m} = \{1 - (-2)^m\} - 2(-2)^{m-1} = 1$ である。よって $S_{2m-1} = 1, \quad S_{2m} = 1 - (-2)^m$ である。

▶ 解法 2

【方針】

得られる一般項を先に予想し、漸化式へ代入して数学的帰納法で確定する。部分和は隣り合う 2 項を組にした等比数列として計算する。

【解答】

(1)

最初の数項を漸化式から求めると

$$1, 2, -2, -4, 4, 8, \dots$$

となる。そこで

$$a_{2j-1} = (-2)^{j-1}, \quad a_{2j} = 2(-2)^{j-1}$$

と予想する。

$j = 1$ では初期条件に一致する。これらがある j まで成り立つとする。漸化式を

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}(a_n - a_{n+1})}{a_n}$$

と書き、予想式を代入すると、次の奇数項・偶数項もそれぞれ $(-2)^j, 2(-2)^j$ になる。予想式は 0 にならないため除法も正当であり、帰納法で一般項が確定する。

(2)

2 項ずつ組にすると

$$a_{2j-1} + a_{2j} = 3(-2)^{j-1}.$$

したがって

$$S_{2m} = 3 \sum_{j=1}^m (-2)^{j-1} = 1 - (-2)^m.$$

また

$$S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m} = 1.$$

よって

$$S_{2m-1} = 1, \quad S_{2m} = 1 - (-2)^m.$$

【総評】 非線形に見える漸化式を比の漸化式へ直す問題で、想定時間は 25 分程度。 a_{n+2} を直接求めようとする式が重くなるが、 a_{n+1}/a_n に注目すると 2 周期がすぐ現れる。和は奇数番目と偶数番目を別々に足すより、 $a_{2j-1} + a_{2j}$ を 1 組にする方が短い。割り算を使うため、得られた一般項で 0 にならないことも確認しておくとも答案が締まる。

【第 2 問】

$f(x) = x - 1$ とする. n を任意の正の整数とすると、関数

$$g_n(x) = \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy$$

の増減を調べ、極値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず積分を実行して $g_n(x)$ を多項式として明示する。微分すると $g'_n(x) = x^{n-1}(x-n)/n$ となるので、 $n=1$ 、 n が奇数で $n \geq 2$ 、 n が偶数で $n \geq 2$ の 3 場合に分け、符号表から増減と極値を読む。

【解答】

まず

$$g_n(x) = \int_0^x (x-y)^{n-1} (y-1) dy$$

を計算する。 $u = x - y$ と見ると

$$\int_0^x (x-y)^{n-1} y dy = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

であり、また

$$\int_0^x (x-y)^{n-1} dy = \frac{x^n}{n}$$

である。したがって $g_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^n}{n} = \frac{x^n(x-n-1)}{n(n+1)}$ である。

これを微分すると $g'_n(x) = \frac{x^{n-1}(x-n)}{n}$ となる。 $n=1$ のとき $g'_1(x) = x-1$ である。したがって $x < 1$ で減少、 $x > 1$ で増加し、 $x=1$ で極小値 $g_1(1) = -\frac{1}{2}$ をとる。 $n \geq 2$ で n が奇数のとき、 $n-1$ は偶数なので $x^{n-1} \geq 0$ である。したがって $g'_n(x)$ の符号は $x-n$ の符号で決まり、 $x < n$ で減少、 $x > n$ で増加する。 $x=0$ でも導関数は 0 になるが、符号は変わらないので極値ではない。よって $x=n$ で極小値 $g_n(n) = \frac{n^n(n-n-1)}{n(n+1)} = -\frac{n^{n-1}}{n+1}$ をとる。 $n \geq 2$ で n が偶数のとき、 $n-1$ は奇数なので x^{n-1} の符号は x の符号と同じである。したがって $g'_n(x)$ の符号は $x(x-n)$ の符号で決まる。すなわち $x < 0$ で増加、 $0 < x < n$ で減少、 $x > n$ で増加である。よって $x=0$ で極大値 $g_n(0) = 0$ をとり、 $x=n$ で極小値 $g_n(n) = -\frac{n^{n-1}}{n+1}$ をとる。

▶ 解法 2

【方針】

部分積分を 1 回行って $g_n(x)$ を閉じた多項式にする。導関数を因数分解し、 $n = 1$ と $n \geq 2$ の偶奇に分けて符号変化を読む。

【解答】

$$g_n(x) = \int_0^x (x-y)^{n-1}(y-1) dy$$

で、 $u = y - 1$ 、 $dv = (x - y)^{n-1} dy$ として部分積分する。 $v = -(x - y)^n / n$ だから

$$g_n(x) = -\frac{x^n}{n} + \frac{1}{n} \int_0^x (x-y)^n dy = \frac{x^n(x-n-1)}{n(n+1)}.$$

したがって

$$g'_n(x) = \frac{x^{n-1}(x-n)}{n}.$$

$n = 1$ のとき

$g'_1(x) = x - 1$ なので、 $x < 1$ で減少、 $x > 1$ で増加する。 $x = 1$ で極小値

$$g_1(1) = -\frac{1}{2}$$

をとる。

$n \geq 2$ が奇数のとき

$x^{n-1} \geq 0$ であり、符号は $x - n$ で決まる。よって $x < n$ で減少、 $x > n$ で増加し、 $x = n$ で極小値

$$g_n(n) = -\frac{n^{n-1}}{n+1}$$

をとる。 $x = 0$ では符号が変わらない。

$n \geq 2$ が偶数のとき

符号は $x(x - n)$ と同じである。よって

$(-\infty, 0)$ で増加、 $(0, n)$ で減少、 (n, ∞) で増加.

$x = 0$ で極大値 0、 $x = n$ で極小値

$$-\frac{n^{n-1}}{n+1}$$

をとる。

【総評】 積分で定義された関数を多項式に直し、導関数の符号を偶奇で読む問題で、想定時間は 30 分程度。上端 x を含む積分だが、直接計算すれば $g_n(x) = x^n(x - n - 1)/(n(n + 1))$ と簡単になる。符号表では $x = 0$ が常に停留点になるわけではなく、 n の偶奇によって極値になるかどうかが変わる点を明示する必要がある。

【第 3 問】

関数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ について、次の問に答えよ。

(1) $x = -1$ から $x = 2$ までの $f(x)$ の定積分を求めよ。

(2) $d_j = 1 + \frac{j-1}{m}$ とし、 $G_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(d_j)$ とする。このとき、 $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は原始関数 $e^x + e^{-x}$ を使って定積分を計算する。(2) は $d_j = 1 + (j-1)/m$ 、幅 $1/m$ の和なので、区間 $[1, 2]$ における左端リーマン和として読む。極限はそのまま

$$\int_1^2 f(x) dx$$

になる。

【解答】

(1) $f(x) = e^x - e^{-x}$ である。原始関数は

$$\int (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x}$$

であるから

$$\int_{-1}^2 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_{-1}^2$$

$= e^2 + e^{-2} - (e^{-1} + e) = e^2 + e^{-2} - e - e^{-1}$ である。

(2) $d_j = 1 + \frac{j-1}{m}$ であるから、 d_j は区間 $[1, 2]$ を m 等分したときの左端の点である。また係数 $1/m$ は小区間の幅である。したがって $G_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(d_j)$ は、区間 $[1, 2]$ における $f(x)$ の左端和である。よって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = \int_1^2 (e^x - e^{-x}) dx$$

である。これを計算すると

$$\int_1^2 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_1^2 = e^2 + e^{-2} - e - e^{-1}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

G_m を 2 つの有限等比数列へ分けて厳密に和を取り、 $m(e^{1/m} - 1) \rightarrow 1$ と $m(1 - e^{-1/m}) \rightarrow 1$ を使って極限を計算する。

【解答】

(1)

原始関数は $e^x + e^{-x}$ であるから

$$\int_{-1}^2 (e^x - e^{-x}) dx = e^2 + e^{-2} - e^{-1} - e.$$

(2)

$j-1 = r$ と書くと

$$G_m = \frac{e}{m} \sum_{r=0}^{m-1} e^{r/m} - \frac{e^{-1}}{m} \sum_{r=0}^{m-1} e^{-r/m}.$$

等比数列の和より

$$G_m = \frac{e(e-1)}{m(e^{1/m}-1)} - \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{m(1-e^{-1/m})}.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(e^{1/m} - 1) = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} m(1 - e^{-1/m}) = 1$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} G_m &= e(e-1) - e^{-1}(1-e^{-1}) \\ &= e^2 + e^{-2} - e - e^{-1}.\end{aligned}$$

(1) の定積分と一致する。

【総評】 定積分と区分求積法の基本問題で、想定時間は 15 分程度。 G_m は右端ではなく左端和であり、点が 1 から $2-1/m$ まで動くことを確認するのが大切である。区間幅 $1/m$ が前に掛かっているため、極限は平均値ではなく定積分そのものになる。(1) と (2) の答えが同じ形になるのも確認材料になる。

【第 4 問】

曲線 $y = \frac{\log x}{x}$ を l_1 、原点を通り l_1 に接する直線を l_2 とする。曲線 l_1 、直線 l_2 および x 軸で囲まれる図形を、点 $(1, 0)$ を通る直線によってその面積を二等分するように分けたとき、 l_1 と l_2 の接点の側にある図形を S とする。このとき次の問に答えよ。ただし、 S は境界を含むものとする。

(1) S の面積を求めよ。

(2) 赤白 2 個のさいころを同時に投げ、赤いさいころの目の数を p 、白いさいころの目の数を q とする。点 (x, y) が S に属しているとき $px + qy$ の最小値が $\frac{9}{5}$ 以下となる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず原点を通る接線の接点を求め、領域全体の面積を正しく計算する。面積は $1/8$ なので、接点側の領域 S は $1/16$ になる。分割直線と接線 l_2 の交点を $Q_0 = (r, r/(2e))$ と置き、 S の面積を r で表して $r = e/4$ を求める。最後に $px + qy$ の最小値が境界の端点 $A = (1, 0)$ または Q_0 で決まることを使って、さいころの 36 通りを数える。

【解答】

(1) $y = \frac{\log x}{x}$ とおくと $y' = \frac{1 - \log x}{x^2}$ である。原点を通る接線の接点を $x = t$ とすると、接線の傾きは $y(t)/t$ に等しいので $\frac{\log t}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2}$ である。したがって $\log t = \frac{1}{2}$ より $t = \sqrt{e}$ である。接線 l_2 は $y = \frac{x}{2e}$ である。

曲線 l_1 は $x = 1$ で x 軸と交わる。よって、 l_1 、 l_2 、 x 軸で囲まれる全体の面積は

$$\int_0^1 \frac{x}{2e} dx + \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{2e} - \frac{\log x}{x} \right) dx$$

である。これを計算すると

$$\int_0^1 \frac{x}{2e} dx = \frac{1}{4e}$$

であり、

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{x}{2e} dx = \frac{e-1}{4e}, \quad \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx = \left[\frac{(\log x)^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{8}$$

である。したがって全体の面積は $\frac{1}{4e} + \frac{e-1}{4e} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ である。

次に、点 $A = (1, 0)$ を通る分割直線が l_2 と交わる点を $Q_0 = (r, \frac{r}{2e})$ とおく。接点側の領域は、曲線側の部分

$$\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{2e} - \frac{\log x}{x} \right) dx = \frac{e-2}{8e}$$

と、 Q_0 から A までの直線と l_2 に挟まれる部分からなる。

直線 AQ_0 の方程式は $y = \frac{r}{2e(r-1)}(x-1)$ である。したがって、 Q_0 から A までの部分の面積は

$$\int_r^1 \left\{ \frac{x}{2e} - \frac{r}{2e(r-1)}(x-1) \right\} dx = \frac{1-r}{4e}$$

である。

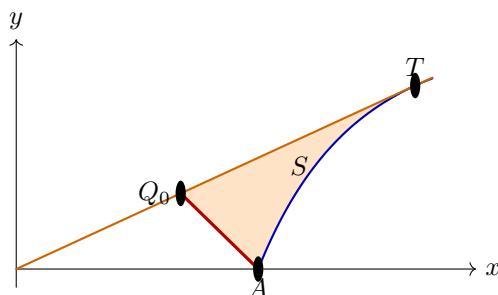
接点側の面積は全体の半分、すなわち $1/16$ であるから $\frac{e-2}{8e} + \frac{1-r}{4e} = \frac{1}{16}$ である。これを解くと $r = \frac{e}{4}$ である。したがって S の面積は $\frac{1}{16}$ である。

(2)

(1) より、分割直線と l_2 の交点は $Q_0 = \left(\frac{e}{4}, \frac{1}{8}\right)$ である。また $A = (1, 0)$ とする。 p, q はさいころの目なので正である。領域 S 上で $px + qy$ の最小値を考える。曲線 l_1 上では $x \geq 1, y \geq 0$ なので $px + qy \geq p$ であり、点 A で p になる。接線 l_2 上の Q_0 から接点までの部分では、 x も y も増加するので最小は Q_0 である。直線 AQ_0 上では一次式の最小は端点で起こる。したがって $\min_S(px + qy) = \min\left(p, \frac{pe}{4} + \frac{q}{8}\right)$ である。

これが $9/5$ 以下になる場合を数える。 $p = 1$ のときは $\min_S(px + qy) \leq p = 1 \leq \frac{9}{5}$ なので、 $q = 1, 2, \dots, 6$ の 6 通りすべてがよい。 $p \geq 2$ のときは $p > 9/5$ なので、点 Q_0 での値を調べればよい。 $p = 2$ では $\frac{pe}{4} + \frac{q}{8} = \frac{e}{2} + \frac{q}{8}$ である。 $2.7 < e < 2.8$ を用いると、 $q = 1, 2, 3$ では $9/5$ 以下で、 $q \geq 4$ では $9/5$ より大きい。したがって $p = 2$ では 3 通りである。 $p \geq 3$ では、最小の $q = 1$ としても $\frac{pe}{4} + \frac{q}{8} \geq \frac{3e}{4} + \frac{1}{8} > \frac{9}{5}$ であるから不適である。

以上より有利な出目は $6 + 3 = 9$ 通りである。全事象は 36 通りなので、求める確率は $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ である。



面積を二等分する直線と領域 S

▶ 解法 2

【方針】

囲まれた全領域を接線下の三角形から曲線下の面積を引いて求める。二等分線でできる三角形の面積から交点を定め、線形関数の最小値は領域の下側境界の 2 端点だけを比較する。

【解答】

(1)

$h(x) = \log x/x$ とすると

$$h'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

接点の x 座標を t とすれば、原点を通る条件は $h'(t) = h(t)/t$ である。よって

$$1 - \log t = \log t, \quad t = \sqrt{e}.$$

接線は

$$l_2: y = \frac{x}{2e}.$$

接線下の三角形 $0 \leq x \leq \sqrt{e}$ の面積は $1/4$ 、曲線下の $1 \leq x \leq \sqrt{e}$ の面積は $1/8$ である。したがって全領域は $1/8$ 、その半分である S の面積は

$$\frac{1}{16}.$$

分割直線と l_2 の交点を $Q_0 = (r, r/(2e))$ とする。接点側に常に含まれる曲線と接線の間の面積は

$$\frac{e-2}{8e}.$$

三角形 AQ_0 と接線の間の面積は、底辺 $1-r$ 、高さ $r/(2e)$ から

$$\frac{1-r}{4e}.$$

両者の和を $1/16$ とおくと $r = e/4$ である。したがって

$$Q_0 = \left(\frac{e}{4}, \frac{1}{8} \right).$$

(2)

$p, q > 0$ なので、 $px + qy$ は x, y がともに増える方向へ増加する。領域 S の下側境界は線分 AQ_0 であり、線形関数の最小値はその端点で生じる。よって

$$\min_S (px + qy) = \min \left\{ p, \frac{pe}{4} + \frac{q}{8} \right\}.$$

$p = 1$ なら $q = 1, \dots, 6$ の 6 通りすべてがよい。 $p = 2$ では

$$\frac{e}{2} + \frac{q}{8} \leq \frac{9}{5}$$

を満たす q は $1, 2, 3$ の 3 通りである。 $p \geq 3$ では $q = 1$ でも左辺が $9/5$ を超える。したがって有利な出目は 9 通りで、

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

である。

【総評】 接線、面積二等分、線形関数の最小値、確率を一つにまとめた重い問題で、想定時間は 45 分程度。最初の全体面積は $1/8$ であり、ここを誤ると分割点がすべてずれる。分割点 $Q_0 = (e/4, 1/8)$ が出た後は、 $px + qy$ の最小値が曲線全体ではなく端点 A と Q_0 の比較で済むことを説明するのが重要である。最後の出目の判定では、 $p = 1$ 、 $p = 2$ 、 $p \geq 3$ に分けると 36 通りを表にせずに数えられる。