

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 1998 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 12 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

以下において、 $f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし、 $F(x) = e^x f(x)$ とおく。
ただし、 e は自然対数の底である。

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件 (A) 「すべての x に対して $f(x+1) = f(x)$ である」
をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

条件 (B) 「すべての x に対して $f'(x) + f(x) \leq 0$ である」
をみたすとき、 $a < b$ ならば $F(a) \geq F(b)$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が (1) の条件 (A) をみたすとき、 $F(x+n)$ (ただし、 n は正の整数) を $F(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が (1), (2) の条件 (A), (B) をともにみたすとする。

① $f(c) \geq 0$ となる c が存在すれば、 $f(c) = 0$ であることを示せ。

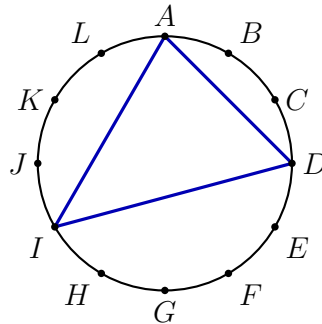
② ある c で $f(c) = 0$ であれば、すべての x で $f(x) = 0$ となることを示せ。

第 2 問

右図のように円周を 12 等分する点 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$ が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形がえられる。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (4) 3 点を選んでえられる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

参考図 (当時資料の配置を再構成)



12 等分点と三角形 ADI の配置

第 3 問

平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = \sin t - t \cos t$, $y = \cos t + t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で与えられている.

- (1) 曲線 C の長さを求めよ.
- (2) 曲線 C 上の各点 P において, P における接線と P で直交する直線を考える. この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は, P を動かすときどんな図形を描くか.
- (3)

$$\int_0^{\pi} t \sin 2t dt$$

を求めよ.

- (4) 曲線 C と y 軸および直線 $y = -1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ.

第 4 (a) 問

- (1) $x \geq y \geq 0$ のとき, 不等式 $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ.
- (2) (i) 不等式 $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ.
(ii) (i) の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ.

第 4 (b) 問

(1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ について、次の等式が成り立つことを示せ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

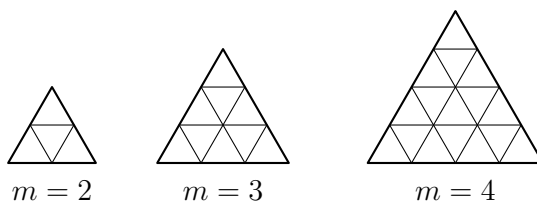
(2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して、辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい.

(i) $m = 2, 3, 4$ のとき、どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ.

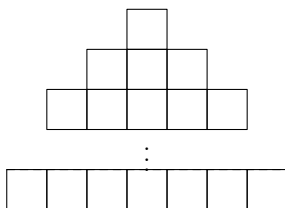
(ii) 一般に、辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し、その式が成り立つ理由を述べよ.

(3) 辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して、すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る. このような台を n 段積み上げ、高さ n の台を作る. この台を真横から見たとき右図のように見えたという. ただし、図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である. このとき台全体の体積を求めよ.

参考図（当時資料の図を再構成）



一辺を等分し、各辺に平行な線で結んだタイル張り



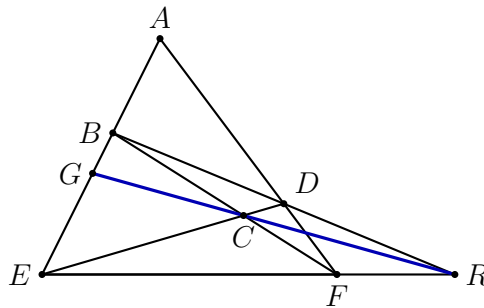
高さ n の台を真横から見た模式図

第 4 (c) 問

右図のような四角形 $ABCD$ において、直線 AB と直線 CD の交点 E 、直線 BC と直線 AD の交点 F 、直線 BD と直線 EF の交点 R 、直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。

- (1) $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE}$ が成り立つことを示せ。
- (2) G が AE の中点で、 $\frac{AD}{DF} = 2$ であるとき、 $AB = a$ 、 $CD = b$ とおく。次の条件を満たす x 、 y 、 z の値を求めよ。
 - (i) $EB = xa$
 - (ii) $EC = yb$
 - (iii) 四角形 $ABCD$ が円に内接するとき、 $a = zb$

参考図（当時資料の交点関係を再構成）



問題の交点関係を保った配置図

第 5 (a) 問

辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおき、線分 OA を $m:n$ に内分する点を P , 線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q , 線分 CO を $m:n$ に内分する点を R , 線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする. (ただし, $m, n > 0$ とする.)

- (1) (i) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
 (ii) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ が垂直かどうかを調べよ.
- (2) (i) 点 P , Q , R , S が同一平面上にあるときの m , n の関係を求めよ.
 (ii) このとき PQ , RS の交点を G として, $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
 (iii) G は正四面体 $OABC$ に外接する球の中心であることを示し, その球の半径を求めよ.

第 5 (b) 問

k を実数とすると、方程式

$$x^3 - (2k + 1)x^2 + (4k^2 + 2k)x - 4k^2 = 0$$

の解を z_1, z_2, z_3 とし、それらを複素数平面上の点と見なす.

- (1) z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ.
- (2) z_1, z_2, z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ.
- (3) 3 点 z_1, z_2, z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1, w_2, w_3 とする.
 w_1, w_2, w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}$ とが原点中心の正六角形の頂点となる
とき, k および θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の値を求めよ.

第 5 (c) 問

3桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$ (a, b, c は, $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$ を満たす整数) を考える.

- (1) 平方数かつ奇数である N で, 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ.
- (2) 命題「 N および a が平方数のとき 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する。」は正しいか. 正しいければそれを示し, 正しくなければ反例をあげよ.
- (3) ある N について, 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり, グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる. このときの N を求めよ.

第 5 (d) 問

- (1) 平面上に半径が R, r ($R > r$) の 2 円があり, それらの中心間の距離が l であるとする. これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ.
- (2) 座標平面上で x 軸を準線とし, 定点 $A(0, a)$ を通る放物線について考える. ただし, $a > 0$ とする.
- (i) そのような放物線の焦点 $F(s, t)$ の全体はどのような図形を描くか.
- (ii) x 軸上にない点 $P(p, q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)