

九州大学 1998 年度 理系

解答

全 10 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

以下において、 $f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし、 $F(x) = e^x f(x)$ とおく．ただし、 e は自然対数の底である．

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件 (A) 「すべての x に対して $f(x+1) = f(x)$ である」

をみたすものの例をあげよ．

(2) 関数 $f(x)$ が

条件 (B) 「すべての x に対して $f'(x) + f(x) \leq 0$ である」

をみたすとき、 $a < b$ ならば $F(a) \geq F(b)$ であることを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ が (1) の条件 (A) をみたすとき、 $F(x+n)$ (ただし、 n は正の整数) を $F(x)$ を用いて表せ．

(4) 関数 $f(x)$ が (1), (2) の条件 (A), (B) をともにみたすとする．

① $f(c) \geq 0$ となる c が存在すれば、 $f(c) = 0$ であることを示せ．

② ある c で $f(c) = 0$ であれば、すべての x で $f(x) = 0$ となることを示せ．

▶ 解法 1

【方針】

条件 (B) は $F(x) = e^x f(x)$ を微分すると単調性に変わる．条件 (A) は f の周期性なので、 $F(x+n) = e^n F(x)$ という倍率つきの関係になる．この 2 つを組み合わせ、 $F(x) \leq 0$ と $F(x) \geq 0$ を別々に示して、最後に恒等的に 0 であることを導く．

【解答】

(1)

例えば $f(x) = \sin 2\pi x$ とすればよい．この関数は定数関数ではなく、すべての x について $f(x+1) = \sin 2\pi(x+1) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin 2\pi x = f(x)$ を満たす．

(2) $F(x) = e^x f(x)$ を微分すると $F'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \{f'(x) + f(x)\}$ である． $e^x > 0$ であり、条件 (B) より $f'(x) + f(x) \leq 0$ だから $F'(x) \leq 0$ である．したがって $F(x)$ は単調減少である．よって $a < b$ なら $F(a) \geq F(b)$ である．

(3)

条件 (A) より、正の整数 n について $f(x+n) = f(x)$ である．したがって $F(x+n) = e^{x+n} f(x+n) = e^n e^x f(x) = e^n F(x)$ である．

(4)

(4)(i) $f(c) \geq 0$ とする．このとき $e^c > 0$ なので $F(c) = e^c f(c) \geq 0$ である．一方、(2) より F は単調減少だから $F(c) \geq F(c+1)$ である．(3) より $F(c+1) = eF(c)$ なので $F(c) \geq eF(c)$ すなわち $(e-1)F(c) \leq 0$ である． $e-1 > 0$ だから $F(c) \leq 0$ である．よって $F(c) = 0$ 、したがって $f(c) = 0$ である．

(4)(ii)

ある c で $f(c) = 0$ とする．このとき $F(c) = 0$ であり、(3) から任意の正の整数 n について $F(c+n) = e^n F(c) = 0$ である．

まず任意の x に対して、(2) の単調性と (3) を x と $x+1$ に適用すると $F(x) \geq F(x+1) = eF(x)$ である．したがって $(e-1)F(x) \leq 0$ より $F(x) \leq 0$ がすべての x で成り立つ．

次に、任意の x を固定する．十分大きい正の整数 n を取れば $x < c+n$ とできる． F は単調減少で、しかも $F(c+n) = 0$ だから $F(x) \geq F(c+n) = 0$ である．よってすべての x で $F(x) \geq 0$ も成り立つ．以上より $F(x) = 0$ がすべての x で成り立つ． $e^x > 0$ であるから $f(x) = 0$ がすべての x で成り立つ．

▶ 解法 2

【方針】

条件 (B) を、各基準点 c から測った積分因子つき関数 $e^t f(c+t)$ の単調性として使う。周期性で同じ値を基準点の左右へ移し、符号を両側から挟む。

【解答】

(1)

例えば

$$f(x) = \sin 2\pi x$$

は定数関数でなく、 $f(x+1) = f(x)$ を満たす。

(2)

$$F'(x) = e^x \{f'(x) + f(x)\} \leq 0$$

なので F は単調減少である。したがって $a < b$ なら $F(a) \geq F(b)$ である。

(3)

周期性から $f(x+n) = f(x)$ なので

$$F(x+n) = e^{x+n} f(x+n) = e^n F(x).$$

(4)

(4)(i)

F の単調性と $F(c+1) = eF(c)$ より

$$F(c) \geq eF(c).$$

したがって $F(c) \leq 0$ 、すなわち $f(c) \leq 0$ である。仮定 $f(c) \geq 0$ と合わせて $f(c) = 0$ となる。

(4)(ii)

$f(c) = 0$ とする。関数

$$H(t) = e^t f(c+t)$$

は $H'(t) = e^t \{f'(c+t) + f(c+t)\} \leq 0$ を満たし、 $H(0) = 0$ である。よって $t > 0$ なら $f(c+t) \leq 0$ 、 $t < 0$ なら $f(c+t) \geq 0$ である。

任意の x に対し、周期性を使って $x+n > c$ となる整数 n と $x-m < c$ となる整数 m を取ると

$$f(x) = f(x+n) \leq 0, \quad f(x) = f(x-m) \geq 0.$$

したがってすべての x で $f(x) = 0$ である。

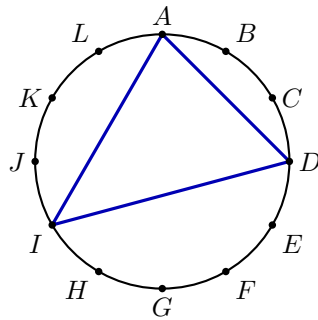
【総評】 周期性と微分不等式を組み合わせる論証問題で、想定時間は 30 分程度。鍵は $F'(x) = e^x \{f'(x) + f(x)\}$ によって条件 (B) を単調減少に直すこと、さらに条件 (A) を $F(x+n) = e^n F(x)$ という倍率つき周期性に直すことである。(4)(ii) は「十分大きい整数 n を取る」部分を省くと証明が飛ぶため、 $F(x) \leq 0$ と $F(x) \geq 0$ を分けて書くのが安全である。

【第 2 問】

右図のように円周を 12 等分する点 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$ が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば、 A, D, I を選べば、図のような三角形がえられる。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (4) 3 点を選んでえられる三角形のうち、互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

参考図（当時資料の配置を再構成）



12 等分点と三角形 ADI の配置

▶ 解法 1

【方針】

12 等分点上の三角形は、円周上で隣り合う選択点の間にある弧の個数で整理する。正三角形は 4 つおき、直角三角形は直径を含むこと、二等辺三角形は頂点を固定して左右同じだけ離れた点を取ることが決め手になる。合同分類では、3 つの弧の個数を小さい順に並べた整数組 $x + y + z = 12$ を漏れなく数える。

【解答】

(1)

正三角形になるには、円周を 3 等分するように頂点を取ればよい。12 等分点では 4 つおきを取るので AEI, BFJ, CGK, DHL の 4 通りである。

(2)

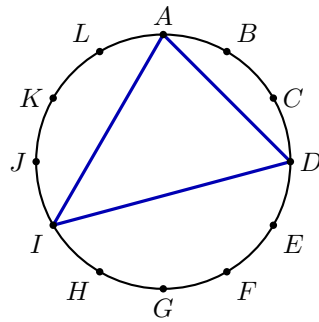
まず頂角となる点を 1 つ固定する。その点から左右に同じだけ離れた 2 点を選べば二等辺三角形になる。離れ方は 1 個おき、2 個おき、3 個おき、4 個おき、5 個おきの 5 通りである。したがって、頂角を固定して数えると $12 \cdot 5 = 60$ 通りとなる。ただし正三角形は、3 つの頂点のどれを頂角と見ても同じ三角形として数えられるため、上の数え方では 1 つの正三角形を 3 回数えている。正三角形は (1) より 4 通りであるから、重複を 2 回分ずつ引いて $60 - 2 \cdot 4 = 52$ 通りである。

(3)

円周上の三角形が直角三角形になるのは、斜辺が円の直径であるときである。直径をなす 2 点の組は $\frac{12}{2} = 6$ 通りある。直径の両端以外の点を第 3 の頂点に選べばよいので、それぞれ 10 通りである。よって $6 \cdot 10 = 60$ 通りである。

(4)

選んだ 3 点が円周を 3 つの弧に分けると、その弧に含まれる 12 等分の個数を小さい順に $1 \leq x \leq y \leq z$ とおく。合同かどうかはこの (x, y, z) で決まり、また $x + y + z = 12$ である。したがって、この条件を満たす整数組を数えればよい。 $x = 1$ のとき $(1, 1, 10), (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6)$ の 5 通り。 $x = 2$ のとき $(2, 2, 8), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 5)$ の 4 通り。 $x = 3$ のとき $(3, 3, 6), (3, 4, 5)$ の 2 通り。 $x = 4$ のとき $(4, 4, 4)$ の 1 通りである。合計して $5 + 4 + 2 + 1 = 12$ 通りである。

12 等分点と三角形 ADI の配置

▶ 解法 2

【方針】

選んだ 3 点が円周を分ける弧の個数を循環的な 3 整数として表す。二等辺・直角の条件を弧の対称性と直径に翻訳し、合同型は $x + y + z = 12$ の順序を除いた正整数解として数える。

【解答】

(1)

正三角形では 3 つの弧がすべて等しいため、弧の個数は $(4, 4, 4)$ である。始点を A, B, C, D のいずれかに取ればすべてを尽くすので、4 通りである。

(2)

頂角を 1 点に固定する。底辺の両端は頂点から左右へ同じだけ離れた点であり、その離れ方は 1 個から 5 個までの 5 通りである。したがって一旦

$$12 \cdot 5 = 60$$

通りを得る。ただし正三角形 4 個は頂点を 3 通りに選んで数えており、各 2 回余分である。よって

$$60 - 2 \cdot 4 = 52$$

通りである。

(3)

円に内接する三角形が直角三角形であることと、1 辺が直径であることは同値である。直径は 6 本あり、その両端以外の 10 点から第 3 頂点を選ぶので

$$6 \cdot 10 = 60$$

通りである。

(4)

3 点が円周を分ける弧の個数を小さい順に

$$1 \leq x \leq y \leq z, \quad x + y + z = 12$$

とおく。この組が同じなら、対応する弦長も同じで三角形は合同である。逆も成り立つ。

x	(x, y, z)	個数
1	$(1, 1, 10), (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6)$	5
2	$(2, 2, 8), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 5)$	4
3	$(3, 3, 6), (3, 4, 5)$	2
4	$(4, 4, 4)$	1

したがって合同でない三角形は

$$5 + 4 + 2 + 1 = 12$$

種類である。

【総評】 円周上の点の選び方を、図に頼りすぎず「弧の個数」に翻訳できるかを問う場合の数の問題で、想定時間は 25 分程度。(2) では正三角形を 3 回数えてしまう点、(3) では直径を先に選ぶ点、(4) では回転・裏返して合同なものを同じ整数組にまとめる点が得点源になる。合同分類は思いつきで図を描くと漏れやすいので、 $1 \leq x \leq y \leq z, x + y + z = 12$ という形にしてから列挙するのが安全である。

【第 3 問】

平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = \sin t - t \cos t$, $y = \cos t + t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で与えられている.

- (1) 曲線 C の長さを求めよ.
- (2) 曲線 C 上の各点 P において, P における接線と P で直交する直線を考える. この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は, P を動かすときどんな図形を描くか.
- (3)

$$\int_0^{\pi} t \sin 2t dt$$

を求めよ.

- (4) 曲線 C と y 軸および直線 $y = -1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

媒介変数表示を微分し、速度ベクトル $(t \sin t, t \cos t)$ から弧長と法線を求める。法線上で原点に最も近い点は、直線に原点から下ろした垂線の足として計算する。面積は x が $0 \leq t \leq \pi$ で増加することを使い、 $dx = t \sin t dt$ によって t の積分に直す。

【解答】

(1) $x = \sin t - t \cos t$, $y = \cos t + t \sin t$ を微分すると $\frac{dx}{dt} = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t$ であり、 $\frac{dy}{dt} = -\sin t + (\sin t + t \cos t) = t \cos t$ である。したがって曲線の長さは

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(t \sin t)^2 + (t \cos t)^2} dt = \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi^2}{2}$$

である。

(2)

点 P における接線方向ベクトルは $(t \sin t, t \cos t)$ である。 $t = 0$ では極限として考えればよく、 $0 < t \leq \pi$ ではこれに垂直な直線、すなわち法線は $\sin t \{X - (\sin t - t \cos t)\} + \cos t \{Y - (\cos t + t \sin t)\} = 0$ である。整理すると $X \sin t + Y \cos t = 1$ となる。

この直線の法線ベクトル $(\sin t, \cos t)$ は長さ 1 であるから、原点からこの直線に下ろした垂線の足は $(\sin t, \cos t)$ である。したがって求める点の軌跡は $X^2 + Y^2 = 1$, $X \geq 0$ で表される右半円である。

(3)

部分積分により

$$\int_0^{\pi} t \sin 2t dt = \left[-\frac{t \cos 2t}{2} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2t dt.$$

第 2 項は 0 であり、 $\cos 2\pi = 1$ だから

$$\int_0^{\pi} t \sin 2t dt = -\frac{\pi}{2}$$

である。

(4) $0 \leq t \leq \pi$ では $\frac{dx}{dt} = t \sin t \geq 0$ である。したがって求める面積は、曲線の y 座標と直線 $y = -1$ の差を x について積分して

$$S = \int_0^{\pi} (y + 1) \frac{dx}{dt} dt$$

と表せる。よって

$$S = \int_0^{\pi} (\cos t + t \sin t + 1) t \sin t dt$$

である。

ここで

$$\int_0^{\pi} t \sin t dt = \pi$$

であり、また (3) より

$$\int_0^{\pi} t \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = -\frac{\pi}{4}$$

である。さらに

$$\int_0^{\pi} t^2 \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \, dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \cos 2t \, dt.$$

部分積分と (3) から

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos 2t \, dt = \left[\frac{t^2 \sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{\pi}{2}$$

である。したがって

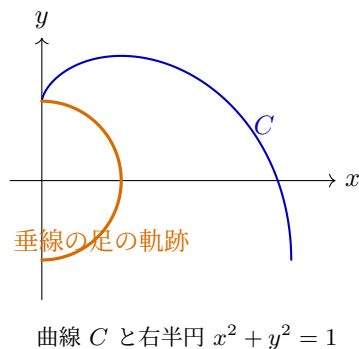
$$\int_0^{\pi} t^2 \sin^2 t \, dt = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$$

である。

以上より

$$S = -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \pi = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

曲線を単位円の伸開線として読む。位置ベクトルを単位円上の点とその接線方向に分解すると、法線への垂線の足が単位円上へ戻ることが直ちに分かる。弧長と面積は同じ分解から積分する。

【解答】

$$Q(t) = (\sin t, \cos t), \quad N(t) = (-\cos t, \sin t)$$

とおくと

$$P(t) = Q(t) + tN(t)$$

が曲線 C の点である。また

$$P'(t) = tQ(t).$$

(1)

$|P'(t)| = t$ なので、弧長は

$$\int_0^{\pi} t \, dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

(2)

$P'(t)$ は $Q(t)$ の方向であるから、 P における法線は $N(t)$ の方向である。法線上の点は

$$P(t) + \lambda N(t) = Q(t) + (t + \lambda)N(t).$$

$Q(t) \perp N(t)$ なので、原点に最も近いのは $\lambda = -t$ のときの $Q(t)$ である。 $0 \leq t \leq \pi$ より、その軌跡は

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0$$

という右半円である。

(3)

部分積分により

$$\int_0^\pi t \sin 2t \, dt = \left[-\frac{t \cos 2t}{2} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2t \, dt = -\frac{\pi}{2}.$$

(4)

$dx = t \sin t \, dt$ であり、領域の上端は $y = \cos t + t \sin t$ 、下端は $y = -1$ である。よって

$$S = \int_0^\pi (1 + \cos t + t \sin t) t \sin t \, dt.$$

3 項を分け、(3) と部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \sin t \, dt &= \pi, \\ \int_0^\pi t \sin t \cos t \, dt &= -\frac{\pi}{4}, \\ \int_0^\pi t^2 \sin^2 t \, dt &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

したがって

$$S = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}.$$

【総評】 媒介変数、法線、面積積分がそろった計算重めの問題で、想定時間は 35 分程度。 $dx/dt = t \sin t$ 、 $dy/dt = t \cos t$ がきれいに outcomes するため、ここを正確に計算できれば全体の見通しが立つ。(2) は法線の式を $X \sin t + Y \cos t = 1$ に整理するのが山場で、(4) は $dx = t \sin t \, dt$ を使って面積を一変数積分に落とすこと、さらに (3) の積分値を再利用することが得点源になる。

【第 4 問 (a)】

- (1) $x \geq y \geq 0$ のとき、不等式 $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。
- (2) (i) 不等式 $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。
 (ii) (i) の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず $t/(1+t)$ が $t \geq 0$ で増加することを、差を取って確認する。次に $u = |x| + |y| + |z|$ を導入し、各項の分母を共通の $1+u$ に大きくして下から評価する。最後に三角不等式と単調性を組み合わせ、等号成立ではどの段階で等号が必要かを一つずつ戻って調べる。

【解答】

(1)

$$\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)}.$$

$x \geq y \geq 0$ より、分子は非負、分母は正である。したがって $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ が成り立つ。

(2)

(2)(i) $u = |x| + |y| + |z|$ とおく。 $u \geq |x|$ であるから

$$\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{|x|}{1+u} = \frac{|x|(u-|x|)}{(1+|x|)(1+u)} \geq 0$$

である。同様に $|y|, |z|$ についても

$$\frac{|y|}{1+|y|} \geq \frac{|y|}{1+u}, \quad \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|z|}{1+u}$$

が成り立つ。よって

$$\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x|+|y|+|z|}{1+u} = \frac{u}{1+u}.$$

また、三角不等式より $u \geq |x+y+z|$. (1) を u と $|x+y+z|$ に適用すると $\frac{u}{1+u} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$. 以上を合わせて、求める不等式が示された。

(2)(ii)

上の証明で等号が成り立つには、まず

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{|x|}{1+u}, \quad \frac{|y|}{1+|y|} = \frac{|y|}{1+u}, \quad \frac{|z|}{1+|z|} = \frac{|z|}{1+u}$$

が同時に必要である。例えば 1 つ目の等号は $|x| = 0$ または $u = |x|$ のときに限る。したがって、 x, y, z のうち 2 つ以上が 0 でないと、少なくとも 1 つの項で等号にならない。

逆に、 x, y, z のうち 0 でないものが高々 1 つであれば、左辺と右辺は同じ値になる。したがって等号成立条件は x, y, z のうち高々 1 つだけが 0 でない ことである。

▶ 解法 2

【方針】

$\phi(t) = t/(1+t)$ の 2 変数に対する加法的不等式を直接計算し、それを 2 回適用する。最後に三角不等式と ϕ の単調性を使い、等号条件を積の消滅条件から読む。

【解答】

(1)

$x \geq y \geq 0$ のとき

$$\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geq 0$$

である。

(2)

(2)(i)

$A, B \geq 0$ に対して

$$\frac{A}{1+A} + \frac{B}{1+B} - \frac{A+B}{1+A+B} = \frac{AB(A+B+2)}{(1+A)(1+B)(1+A+B)} \geq 0$$

が成り立つ。これをまず $A = |x|, B = |y|$ 、次に $A = |x| + |y|, B = |z|$ に適用すると

$$\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|}.$$

三角不等式より $|x| + |y| + |z| \geq |x+y+z|$ であり、(1) を用いれば右辺は

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$$

以上である。

(2)(ii)

2 変数の式で等号となるのは $AB = 0$ のときである。2 回の適用で同時に等号となるには、 $|x|, |y|, |z|$ のうち 2 つ以上が 0 でなければならない。この条件なら三角不等式でも等号になる。したがって等号成立条件は

$$x, y, z \text{ のうち少なくとも 2 つが } 0$$

である。

【総評】 不等式そのものは短いですが、等号成立条件まで正確に戻る必要があるため、想定時間は 25 分程度。左辺をいきなりまとめようとせず、 $u = |x| + |y| + |z|$ を置いて分母をそろえるのが中心発想である。等号条件では、三角不等式の等号だけを見ても不十分で、各項を $1 + u$ に置き換えた段階の等号条件を確認することが重要である。

【第 4 問 (b)】

- (1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

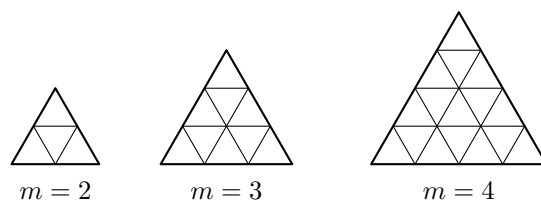
- (2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して、辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

(i) $m = 2, 3, 4$ のとき、どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。

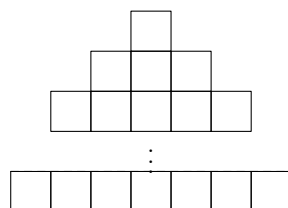
(ii) 一般に、辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し、その式が成り立つ理由を述べよ。

- (3) 辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して、すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ、高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし、図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。

参考図（当時資料の図を再構成）



一辺を等分し、各辺に平行な線で結んだタイル張り



高さ n の台を真横から見た模式図

▶ 解法 1

【方針】

平方和公式は差分を作って望ましい右辺が 1 項ずつ増えることを示す。正三角形タイルは上からの段に分けると奇数列 $1, 3, 5, \dots$ が現れる。立体では真横から見える各段について、同じ段の奥行き方向にも同じ個数の並びがあると読み、 $(2k-1)^2$ 個を足し上げる。

【解答】

(1) $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ とおく。 $T_0 = 0$ と考えると $T_k - T_{k-1} = \frac{1}{6}\{k(k+1)(2k+1) - (k-1)k(2k-1)\}$ である。中を展開すると $k(k+1)(2k+1) - (k-1)k(2k-1) = 6k^2$ だから $T_k - T_{k-1} = k^2$ である。したがって $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + \dots + (T_n - T_{n-1}) = T_n$ となり、 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が示された。

(2)

(2)(i)

一辺をそれぞれ 2 等分、3 等分、4 等分し、各分点を辺に平行な線で結べばよい。すると、一辺の長さが 1 の正三角形だけに分割される。図示するときは、 $m = 2$ では 4 個、 $m = 3$ では 9 個、 $m = 4$ では 16 個の小正三角形に分ければよい。

(2)(ii)

上から k 段目には、小正三角形が $2k-1$ 個並ぶ。よって必要なタイルの個数は $1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1)$ である。これは

$$\sum_{k=1}^m (2k-1) = 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} - m = m^2 \text{ となる。したがって必要なタイル数は } m^2 \text{ である。}$$

(3)

真横から見て上から k 段目にあたる層では、横方向に $2k-1$ 個の単位が並ぶ。同じ層を上から見ると、奥行き方向にも同じ三角形の並びができるので、その層に含まれる正三角柱の個数は $(2k-1)^2$ 個である。したがってブロックの総数は $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2$ である。

$$(1) \text{ の平方和公式を使うと } \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1)$$

$$= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$$

ブロック 1 個の底面積は、一辺 1 の正三角形の面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であり、高さは 1 である。よってブロック 1 個の体積は $\sqrt{3}/4$ で、台全体の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) = \frac{\sqrt{3}}{12}n(2n-1)(2n+1)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

平方和公式は数学的帰納法で証明し、タイル数は相似な正三角形の面積比で求める。立体は真横から見た第 k 層の一辺が $2k-1$ であることから、各層のブロック数を面積比で数える。

【解答】

(1)

$n=1$ では両辺は 1 である。 n で成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

これは $n+1$ の式であるから、数学的帰納法により示された。

(2)

(2)(i)

各辺を m 等分し、分点から辺に平行な線を引く。 $m=2,3,4$ の配置は問題の参考図のとおりである。

(2)(ii)

大きい正三角形とタイルは相似で、相似比は $m:1$ である。面積比は $m^2:1$ だから、すき間なく重なりなく張るタイルの個数は

$$m^2$$

である。

(3)

上から第 k 層を真横から見ると一辺が $2k-1$ の正三角柱の台である。同じ高さの層に必要な単位ブロック数は、(2) の面積比と同じく

$$(2k-1)^2$$

個である。したがって総数は

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

1 ブロックの体積は $\sqrt{3}/4$ なので、台全体の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{12}n(2n-1)(2n+1)$$

である。

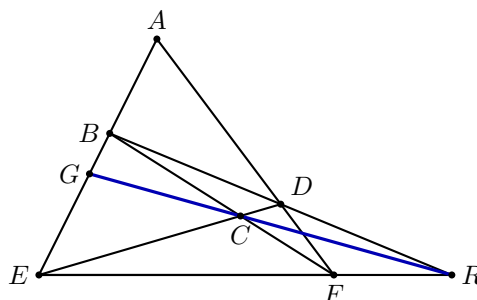
【総評】 平方和公式、平面の敷き詰め、立体の段数えをつなぐ問題で、想定時間は 25 分程度。(1) の公式をただ暗記として使うのではなく、差分で証明してから (3) に再利用する構成がよい。(2) では奇数列、(3) では奇数の 2 乗列が現れることを見抜けるかが中心で、図の読み取りを式 $(2k-1)^2$ に落とし込むところが最も減点されやすい。

【第 4 問 (c)】

右図のような四角形 $ABCD$ において、直線 AB と直線 CD の交点 E 、直線 BC と直線 AD の交点 F 、直線 BD と直線 EF の交点 R 、直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。

- (1) $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE}$ が成り立つことを示せ。
- (2) G が AE の中点で、 $\frac{AD}{DF} = 2$ であるとき、 $AB = a$ 、 $CD = b$ とおく。次の条件を満たす x, y, z の値を求めよ。
 - (i) $EB = xa$
 - (ii) $EC = yb$
 - (iii) 四角形 $ABCD$ が円に内接するとき、 $a = zb$

参考図（当時資料の交点関係を再構成）



問題の交点関係を保った配置図

▶ 解法 1

【方針】

(1) は図形定理の名前だけに頼らず、交点 E を原点に置いて座標計算で比を確認する。(2) ではその座標式に G が AE の中点である条件を入れて EB/AB を求める。続いてメネラウスの定理で EC/CD を求め、円に内接する条件は点 E の方べき $EA \cdot EB = ED \cdot EC$ で処理する。

【解答】

(1)

直線 AB と直線 CD の交点 E を原点に取り、直線 AB を x 軸、直線 CD を y 軸とする。座標を $A = (u, 0)$ 、 $B = (v, 0)$ 、 $C = (0, r)$ 、 $D = (0, s)$ とおく。

このとき、直線 AD と直線 BC の交点 F を求め、さらに直線 BD と直線 EF の交点 R を求める。計算すると $R = \left(\frac{uv(r-s)}{2ur-us-vr}, \frac{rs(u-v)}{2ur-us-vr} \right)$ である。直線 RC と x 軸との交点が G であるから、 G の x 座標を求めると $G = \left(\frac{uv}{2u-v}, 0 \right)$ となる。

有向線分の比で考えると

$$\frac{BG}{GE} = \frac{v - \frac{uv}{2u-v}}{\frac{uv}{2u-v}} = \frac{u-v}{u}$$

である。一方 $\frac{BA}{AE} = \frac{u-v}{u}$ である。したがって $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE}$ が成り立つ。

(2)

(2)(i)

(1) の座標で、 G が AE の中点であることは $\frac{uv}{2u-v} = \frac{u}{2}$ を意味する。 $u \neq 0$ なので $2v = 2u - v$ より $v = \frac{2u}{3}$ である。したがって $EB = \frac{2u}{3}$ 、 $AB = u - v = \frac{u}{3}$ となる。よって $EB = 2AB$ である。問題の記号で $AB = a$ だから $EB = 2a$ であり、 $x = 2$ である。

(2)(ii)

三角形 AED において、直線 BCF にメネラウスの定理を用いると $\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$ である。(i) より $AB/BE = 1/2$ である。また $AD/DF = 2$ より、 $AD = 2DF$ 、したがって $AF = AD + DF = 3DF$ なので $\frac{DF}{FA} = \frac{1}{3}$ である。よって $\frac{1}{2} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{1}{3} = 1$ となるから $\frac{EC}{CD} = 6$ である。問題の記号で $CD = b$ だから $EC = 6b$ であり、 $y = 6$ である。

(2)(iii)

四角形 $ABCD$ が円に内接するとき、点 E の方べきより $EA \cdot EB = ED \cdot EC$ が成り立つ。(i)、(ii) より $EA = EB + BA = 2a + a = 3a$ であり、 $ED = EC + CD = 6b + b = 7b$ である。したがって $(3a)(2a) = (7b)(6b)$ すなわち $6a^2 = 42b^2$ である。 $a, b > 0$ より $a = \sqrt{7}b$ となる。よって $z = \sqrt{7}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

交点と線分比だけを使うため、アフィン変換で E, A, C を簡単な座標へ移す。一般の 2 変数で G を求め、残りはメネラウスの定理と方べきで長さ比を連結する。

【解答】

(1)

直線上の比と交点関係はアフィン変換で保たれる。そこで

$$E = (0, 0), \quad A = (1, 0), \quad B = (u, 0), \quad C = (0, 1), \quad D = (0, v)$$

と置く。直線 AD と BC の交点を F 、直線 BD と EF の交点を R として順に連立方程式を解く。最後に RC と x 軸の交点を求めると

$$G = \left(\frac{u}{2-u}, 0 \right).$$

有向比で

$$\frac{BG}{GE} = \frac{u - u/(2-u)}{u/(2-u)} = 1 - u = \frac{BA}{AE}.$$

(2)

(2)(i)

G が AE の中点なので $G = (1/2, 0)$ である。したがって $u/(2-u) = 1/2$ 、すなわち $u = 2/3$ である。よって

$$EB = \frac{2}{3}, \quad AB = \frac{1}{3}, \quad EB = 2AB.$$

したがって $x = 2$ 。

(2)(ii)

三角形 AED と横切る直線 BCF にメネラウスの定理を使うと

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1.$$

$AB/BE = 1/2$ 、また $AD/DF = 2$ から $DF/FA = 1/3$ なので

$$\frac{EC}{CD} = 6.$$

したがって $y = 6$ 。

(2)(iii)

円に内接するとき、点 E の方べきより

$$EA \cdot EB = ED \cdot EC.$$

$EA = 3a, EB = 2a, ED = 7b, EC = 6b$ だから

$$6a^2 = 42b^2.$$

長さは正なので

$$a = \sqrt{7}b, \quad z = \sqrt{7}.$$

【総評】 完全四角形の比を扱う幾何問題で、想定時間は 35 分程度。(1) は射影幾何的な性質だが、試験答案では座標を置いて G の位置を出すと比の向きまで明確になる。(2) は G が中点という条件から $EB = 2AB$ を出すところが入口で、以後はメネラウス、方べきと標準手順が続く。線分比は図の位置関係で符号や順序を間違えやすいため、 EA, EB, EC, ED を最後に長さとして書き直すと安全である。

【第 5 問 (a)】

辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおき、線分 OA を $m:n$ に内分する点を P , 線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q , 線分 CO を $m:n$ に内分する点を R , 線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。(ただし、 $m, n > 0$ とする.)

- (1) (i) $\vec{PQ}$, $\vec{RS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
(ii) $\vec{PQ}$ と $\vec{RS}$ が垂直かどうかを調べよ.
- (2) (i) 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの m, n の関係を求めよ.
(ii) このとき PQ, RS の交点を G として、 $\vec{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
(iii) G は正四面体 $OABC$ に外接する球の中心であることを示し、その球の半径を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

内分点の位置ベクトルを m, n のまま表し、正四面体の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1/2$ で垂直性を確認する。同一平面条件は、 S が P, Q, R の張る平面上にあるとして係数比較し、 $(m-n)(m^2+n^2)=0$ まで落とす。以後は $m=n$ として交点と外接球中心を直接距離計算で示す。

【解答】

(1)

(1)(i)

内分点の公式より

$$\vec{OP} = \frac{m}{m+n} \vec{a}, \quad \vec{OQ} = \frac{n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n}$$

である。また

$$\vec{OR} = \frac{n}{m+n} \vec{c}, \quad \vec{OS} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

である。したがって

$$\vec{PQ} = \frac{-m\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n}, \quad \vec{RS} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c}}{m+n}$$

である。

(1)(ii)

正四面体より

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

である。(1)(i) の 2 つのベクトルの内積を計算すると

$$(m+n)^2 \vec{PQ} \cdot \vec{RS} = (-m\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}) \cdot (n\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c}).$$

長さの 2 乗の項は $-mn + mn - mn = -mn$ で、異なるベクトルの内積の項は $\frac{1}{2}\{(n^2 - m^2) + 2mn + (m^2 - n^2)\} = mn$ である。したがって内積は 0 となり、 $PQ \perp RS$ である。

(2)

(2)(i)

4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとする。このとき

$$\vec{OS} = \alpha \vec{OP} + \beta \vec{OQ} + (1 - \alpha - \beta) \vec{OR}$$

と書ける。両辺に $m+n$ を掛け、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数を比較すると $n = \alpha m$, $m = \beta n$, $0 = \beta m + (1 - \alpha - \beta)n$ を得る。最初の 2 式から $\alpha = \frac{n}{m}$, $\beta = \frac{m}{n}$ である。これを 3 目の式に代入すると $0 = \frac{m^2}{n} + n - \frac{n^2}{m} - m$ であり、両辺に mn を掛けて整理すると $(m-n)(m^2+n^2) = 0$ となる。 $m, n > 0$ なので $m^2+n^2 > 0$ であり、 $m = n$ が必要である。

逆に $m = n$ のとき

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

であり、 $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{RQ}$ となる。したがって 4 点は同一平面上にある。よって求める条件は $m = n$ である。

(2)(ii) $m = n$ のとき、 PQ と RS は同じ中点をもつ。したがって交点 G は

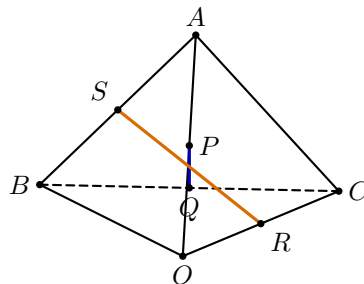
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

である。

(2)(iii) G から各頂点までの距離を直接計算する。まず $16GO^2 = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = 6$ である。また $4\overrightarrow{GA} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ だから

$$16GA^2 = |3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 = 9 + 1 + 1 + 2\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 6$$

である。同様に $16GB^2 = 16GC^2 = 6$ である。したがって $GO = GA = GB = GC$ となり、 G は正四面体 $OABC$ に外接する球の中心である。半径は $\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。



正四面体の各边上の内分点

▶ 解法 2

【方針】

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を座標軸とみなす斜交座標で 4 点を表す。同一平面条件は 3 本の差ベクトルの行列式で判定し、 $m = n$ の後は平行四辺形の対角線と正四面体の対称性を使う。

【解答】

(1)

(1)(i)

内分点の斜交座標は

$$P = \frac{1}{m+n}(m, 0, 0), \quad Q = \frac{1}{m+n}(0, n, m),$$

$$R = \frac{1}{m+n}(0, 0, n), \quad S = \frac{1}{m+n}(n, m, 0).$$

したがって

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{-m\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n}, \quad \overrightarrow{RS} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c}}{m+n}.$$

(1)(ii)

正四面体では

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}.$$

これを用いて内積を展開すると 0 となるので $PQ \perp RS$ 。

(2)

(2)(i)

4 点が同一平面上にある条件は

$$\det(Q - P, R - P, S - P) = 0.$$

分母 $(m + n)^3$ を除いた行列式は

$$(n - m)(m^2 + n^2)$$

である。 $m, n > 0$ より $m^2 + n^2 > 0$ なので

$$m = n.$$

(2)(ii)

 $m = n$ では $PQRS$ が平行四辺形になり、対角線の中点が G である。よって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

(2)(iii)

$$16GO^2 = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = 6.$$

また

$$16GA^2 = |3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 = 6$$

であり、対称性から $GB^2 = GC^2 = 6/16$ も成り立つ。よって G は外接球中心で、半径は

$$\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

【総評】 文系版より一段重く、同一平面条件を一般の m, n で処理するところが山場の空間ベクトル問題で、想定時間は 40 分程度。係数比較では α, β を置いた後、最後の $\vec{c}$ の係数まで必ず使うことが重要である。 $m = n$ に落ちた後は対称性が強くなるので、交点と外接球中心は中点・距離計算で整然と示せる。

【第 5 問 (b)】

 k を実数とすると、方程式

$$x^3 - (2k + 1)x^2 + (4k^2 + 2k)x - 4k^2 = 0$$

の解を z_1, z_2, z_3 とし、それらを複素数平面上の点と見なす。

- (1) z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。
- (2) z_1, z_2, z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。
- (3) 3 点 z_1, z_2, z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1, w_2, w_3 とする。 w_1, w_2, w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}$ とが原点中心の正六角形の頂点となると、 k および θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

3 次式を因数分解し、解を $1, k(1 + \sqrt{3}i), k(1 - \sqrt{3}i)$ として複素数平面上の座標で扱う。一直線条件は $(1, 0)$ が 2 つの共役点を結ぶ直線上に乗るかどうかで判断し、直角条件は対称な二等辺三角形の頂点での内積を 0 にする。正六角形条件ではまず絶対値をそろえ、 $k = 1/2$ と $k = -1/2$ で偏角を分けて調べる。

【解答】

(1)

因数分解すると $x^3 - (2k + 1)x^2 + (4k^2 + 2k)x - 4k^2 = (x - 1)(x^2 - 2kx + 4k^2)$ である。したがって解は $z_1 = 1, z_2 = k(1 + \sqrt{3}i), z_3 = k(1 - \sqrt{3}i)$ と表せる。

複素数平面上では、これらは $(1, 0)$, $(k, \sqrt{3}k)$, $(k, -\sqrt{3}k)$ である。 $k \neq 0$ のとき、後の 2 点は直線 $x = k$ 上の異なる 2 点なので、3 点が一直線上にあるには $1 = k$ が必要である。また $k = 0$ のときは $z_2 = z_3 = 0$ となり、3 点はいずれも実軸上にある。よって $k = 0, 1$ である。

(2) $k = 0$ では三角形にならないので除いて考える。3 点は実軸に関して対称であり、 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$ である。したがって直角三角形になるなら、直角は z_1 の位置にある。そこで $z_2 - z_1 = (k - 1) + \sqrt{3}ki$, $z_3 - z_1 = (k - 1) - \sqrt{3}ki$ に対応する 2 つのベクトルの内積を 0 にする。すなわち $(k - 1)^2 - 3k^2 = 0$ である。整理して $2k^2 + 2k - 1 = 0$ だから $k = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ である。

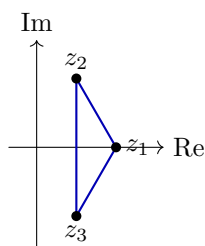
(3)

正六角形の 6 頂点はすべて原点から同じ距離にある。したがって $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ が必要である。 $|z_1| = 1$, $|z_2| = |z_3| = 2|k|$ だから $2|k| = 1$ より $k = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ である。 $k = 1/2$ のとき、回転前の偏角は $0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ である。これを $\theta = \pi/2$ だけ回転すると、偏角は $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ となり、共役な点を合わせて正六角形の頂点になる。よって $\theta = \frac{\pi}{2}$ である。 $k = -1/2$ のとき、回転前の偏角は $0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ である。共役な点と合わせて 60 度間隔の 6 点にするには、これらを正六角形の交互の頂点の位置に置けばよい。 $0 \leq \theta \leq \pi$ で調べると $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ である。

したがって求める組は

$$(k, \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

である。



実軸に関して対称な 3 根の配置

▶ 解法 2

【方針】

3 根を実座標へ直し、三角形の符号付き面積と 3 辺の長さの 2 乗で (1)(2) を処理する。(3) は絶対値をそろえた後、偏角の集合が正六角形の 6 方向と一致する回転角を列挙する。

【解答】

3 点は

$$z_1 = (1, 0), \quad z_2 = (k, \sqrt{3}k), \quad z_3 = (k, -\sqrt{3}k)$$

である。

(1)

三角形の符号付き面積の 2 倍は $-2\sqrt{3}k(k - 1)$ である。したがって一直線条件は

$$k = 0, 1.$$

(2)

$k = 0$ は三角形を作らない。等しい 2 辺の長さの 2 乗を

$$L^2 = (k - 1)^2 + 3k^2$$

とすると、底辺の長さの 2 乗は $12k^2$ である。直角三角形条件は

$$12k^2 = 2L^2$$

であり、

$$2k^2 + 2k - 1 = 0.$$

よって

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

(3)

原点からの距離が等しい条件は $2|k| = 1$ なので $k = \pm 1/2$ 。

$k = 1/2$ の偏角は $0, \pm\pi/3$ 。共役を取った後に 6 方向を得る回転角は

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$k = -1/2$ の偏角は $0, \pm 2\pi/3$ 。 $0 \leq \theta \leq \pi$ で正六角形の 6 方向になるのは

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6}.$$

したがって求める組は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

【総評】 複素数平面の問題だが、実際には座標平面上の対称な 3 点として扱うと見通しがよい。想定時間は 35 分程度。(1) で $k = 0$ を落とさないこと、(2) では三角形にならない $k = 0$ を除くこと、(3) では $k = \pm 1/2$ の偏角配置を別々に調べるのが重要である。文系版と違って k が実数全体なので、負の k による 3 候補を残す必要がある。

【第 5 問 (c)】

3 桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$ (a, b, c は、 $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ を満たす整数) を考える。

- (1) 平方数かつ奇数である N で、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ。
- (2) 命題「 N および a が平方数のとき 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する。」は正しいか。正しいければそれを示し、正しくなければ反例をあげよ。
- (3) ある N について、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり、グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときの N を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

接する条件は判別式 $b^2 - 4ac = 0$ である。(1) では 3 桁の奇数平方数の末尾を 1, 5, 9 に分け、判別式 0 を満たす数字だけを拾う。(2) は反例で否定する。(3) では整数根を $\alpha < \beta$ とし、面積公式 $a(\beta - \alpha)^3/6$ から根の差と係数 a を先に決め、数値条件で最後まで絞る。

【解答】

(1)

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接する条件は $b^2 - 4ac = 0$ である。また N は奇数の平方数なので、一の位 c は 1, 5, 9 のいずれかである。 $c = 1$ のとき、判別式 0 は $b^2 = 4a$ である。したがって a は平方数で、候補は $(a, b, c) = (1, 2, 1), (4, 4, 1), (9, 6, 1)$ である。対応する N は 121, 441, 961 で、いずれも奇数の平方数である。 $c = 5$ のときは $b^2 = 20a$ であるが、 $0 \leq b \leq 9$, $1 \leq a \leq 9$ を満たす平方数 b^2 は得られない。 $c = 9$ のときは $b^2 = 36a$ である。桁の条件から可能なのは $(a, b, c) = (1, 6, 9)$ だけであり、 $N = 169$ は奇数の平方数である。

したがって求める数は 121, 169, 441, 961 である。

(2)

命題は正しくない。反例として $N = 196$ を取る。このとき $N = 14^2$ 、また百の位は $a = 1 = 1^2$ であり、どちらも平方数である。しかし $b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 81 - 24 = 57 \neq 0$ であるから、 $y = x^2 + 9x + 6$ のグラフは x 軸と接しない。よって命題は偽である。

(3)

2 つの整数根を $\alpha < \beta$ とする。このとき $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と書ける。 $\alpha < x < \beta$ では $y \leq 0$ だから、囲まれる部分の面積は

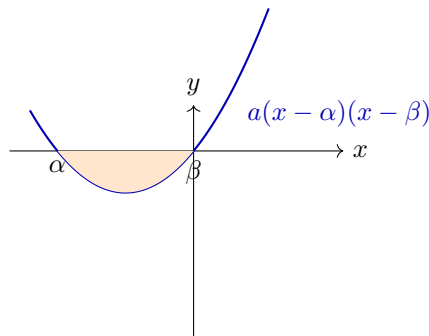
$$\int_{\alpha}^{\beta} -a(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$$

である。これが 4 に等しいので $a(\beta - \alpha)^3 = 24$ である。 a は 1 桁の正整数、 $\beta - \alpha$ は正整数である。 $(\beta - \alpha)^3$ が 24 を割る必要があるので $\beta - \alpha = 2$, $a = 3$ しかない。

根と係数の関係より $\alpha + \beta = -\frac{b}{3}$, $\alpha\beta = \frac{c}{3}$ である。 $\beta = \alpha + 2$ とおくと

$$b = -3(2\alpha + 2) = -6(\alpha + 1), \quad c = 3\alpha(\alpha + 2) = 3\{(\alpha + 1)^2 - 1\}.$$

$0 \leq b \leq 9$ より、可能なのは $\alpha + 1 = 0$ または $\alpha + 1 = -1$ である。前者では $c = -3$ となり不適。後者、すなわち $\alpha = -2$, $\beta = 0$ のとき $b = 6$, $c = 0$ となり条件を満たす。よって $N = 360$ である。



2 根の間で放物線と x 軸に囲まれる面積

▶ 解法 2

【方針】

(1) は判別式と平方数の末尾を独立に列挙する。(3) は 2 根の中点へ平行移動して面積を計算し、根の差と百の位を先に確定してから十・一の位を復元する。

【解答】

(1)

接する条件は

$$b^2 = 4ac.$$

3 桁の奇平方数を 11^2 から 31^2 まで調べ、同時に上式を満たすものを照合すると

$$121, \quad 169, \quad 441, \quad 961$$

を得る。実際、それぞれの (a, b, c) は

$$(1, 2, 1), (1, 6, 9), (4, 4, 1), (9, 6, 1)$$

であり、すべて $b^2 = 4ac$ を満たす。

(2)

命題は偽である。例えば

$$N = 196 = 14^2, \quad a = 1$$

だが

$$b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 57 \neq 0.$$

(3)

整数根を $\alpha < \beta$ 、差を $d = \beta - \alpha$ とする。中点を原点へ移すと、根の間の放物線と x 軸の距離は

$$a \left\{ \left(\frac{d}{2} \right)^2 - u^2 \right\}.$$

したがって面積は

$$\int_{-d/2}^{d/2} a \left\{ \left(\frac{d}{2} \right)^2 - u^2 \right\} du = \frac{ad^3}{6}.$$

これが 4 なので $ad^3 = 24$. a と d は正整数だから

$$a = 3, \quad d = 2.$$

$\beta = \alpha + 2$ として根と係数の関係を使うと

$$b = -6(\alpha + 1), \quad c = 3\alpha(\alpha + 2).$$

桁条件 $0 \leq b, c \leq 9$ を満たすのは $\alpha = -2, \beta = 0$ で、

$$(a, b, c) = (3, 6, 0).$$

よって

$$N = 360.$$

【総評】 数字の条件、判別式、放物線と面積を組み合わせた整数問題で、想定時間は 35 分程度。(1) では奇数平方数の一位に 5 も一度は入れて、判別式条件で除外するのが丁寧である。(3) は候補を総当たりするより、面積公式から $a = 3$ 、根の差 2 を先に決めると一気に絞れる。反例問題では、条件を満たしていることと結論が失敗していることの両方を数式で確認する必要がある。

【第 5 問 (d)】

- (1) 平面上に半径が R, r ($R > r$) の 2 円があり、それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。
- (2) 座標平面上で x 軸を準線とし、定点 $A(0, a)$ を通る放物線について考える。ただし、 $a > 0$ とする。
 - (i) そのような放物線の焦点 $F(s, t)$ の全体はどのような図形を描くか。
 - (ii) x 軸上にない点 $P(p, q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 2 円の中心間距離が、外接する距離と内接する距離の間にあることを必要十分条件として書く。(2) では放物線の定義を使い、点 A が放物線上にある条件から焦点 F の軌跡を円として求める。さらに点 P も同じ放物線上にある条件は、焦点が 2 つの円の共有点になる条件に変わるので、(1) を用いて p, q の条件へ整理する。

【解答】

(1)

半径 R, r の 2 円の中心間距離を l とする。2 つの円周が共有点をもつためには、遠すぎて離れてはいけなないので $l \leq R + r$ が必要である。また、一方の円が他方の内側に入りすぎていても共有点をもたないので $l \geq R - r$ が必要である。逆に $R - r \leq l \leq R + r$ なら、2 円は外接、内接、または 2 点で交わる。したがって必要十分条件は $R - r \leq l \leq R + r$ である。

(2)

(2)(i)

焦点を $F(s, t)$ とする。点 $A(0, a)$ が放物線上にあるためには、 A から焦点までの距離と、 A から準線である x 軸までの距離が等しければよい。後者は a であるから $AF = a$ である。すなわち $s^2 + (t - a)^2 = a^2$ である。

したがって焦点 F の全体は、中心 $(0, a)$ 、半径 a の円 $s^2 + (t - a)^2 = a^2$ である。ただし焦点が準線上の原点に来る場合は放物線としては退化するので、原点は除く。

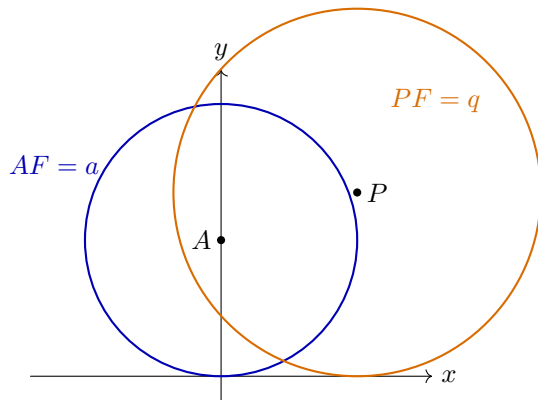
(2)(ii)

点 $P(p, q)$ は x 軸上にないので $q \neq 0$ である。 P がその放物線上にあるには、同じ焦点 $F(s, t)$ について $PF = |q|$ が成り立つ必要がある。つまり焦点 F は、中心 $A(0, a)$ 、半径 a の円と、中心 $P(p, q)$ 、半径 $|q|$ の円の共有点でなければならない。

まず $q < 0$ の場合を考える。このとき 2 つ目の円の半径は $-q$ である。中心間距離を $AP = \sqrt{p^2 + (q - a)^2}$ とすると、(1) より必要な上限条件は $AP \leq a - q$ である。両辺を 2 乗すると $p^2 + (q - a)^2 \leq (a - q)^2$ となるので $p = 0$ が必要である。しかしこのとき 2 円の共有点は原点だけとなり、焦点としては使えない。したがって $q < 0$ は不適である。

次に $q > 0$ とする。このとき 2 つの円の半径は q である。共有点をもつための条件は $|a - q| \leq AP \leq a + q$ である。左側の不等式は $AP^2 = p^2 + (q - a)^2 \geq (q - a)^2$ より自動的に成り立つ。右側の不等式は $p^2 + (q - a)^2 \leq (a + q)^2$ であり、整理すると $p^2 \leq 4aq$ である。

ただし $p = 0$ のときは注意が必要である。この場合、2 つの円はどちらも原点を通る。 $q \neq a$ なら共有点は原点だけであり、これは焦点として使えない。 $q = a$ なら 2 つの円は一致し、原点以外の焦点を取れる。したがって必要十分条件は $p \neq 0$ のとき $q \geq \frac{p^2}{4a}$, $p = 0$ のとき $q = a$ である。



焦点は 2 円の共有点として決まる

▶ 解法 2

【方針】

放物線の定義を焦点を中心とする円の条件として使う。点 A と点 P が同じ放物線上にあることを 2 円の共有点の存在へ変換し、円の交点条件と退化する原点を分けて処理する。

【解答】

(1)

2 円が外側へ離れすぎない条件は $l \leq R + r$ 、一方が他方の内部へ入りすぎない条件は $l \geq R - r$ である。接する場合も含めて

$$R - r \leq l \leq R + r$$

が必要十分である。

(2)

(2)(i)

焦点を $F = (s, t)$ とする。 $A = (0, a)$ から準線までの距離は a なので、放物線の定義から

$$AF = a.$$

よって焦点の軌跡は

$$s^2 + (t - a)^2 = a^2$$

である。ただし原点は焦点が準線上にあり退化するため除く。

(2)(ii)

$P = (p, q)$ が同じ放物線上にあるには

$$AF = a, \quad PF = |q|$$

を同時に満たす原点以外の F が存在すればよい。

$q < 0$ では 2 円は原点以外で交われず不適である。 $q > 0$ では中心間距離

$$AP = \sqrt{p^2 + (q - a)^2}$$

について

$$|a - q| \leq AP \leq a + q$$

が必要十分である。左側は自動的に、右側を 2 乗すると

$$p^2 \leq 4aq.$$

$p \neq 0$ なら共有点は原点でないのでこれで十分である。 $p = 0$ では、 $q \neq a$ の 2 円は原点で接するだけであり不適、 $q = a$ なら 2 円が一致して原点以外の焦点を取れる。したがって

$$(p, q) = (0, a)$$

または

$$p \neq 0, \quad 4aq \geq p^2$$

が必要十分条件である。

【総評】 放物線の定義を 2 円の共有点条件に変換する問題で、想定時間は 30 分程度。焦点の軌跡はすぐ円になるが、原点を除く理由を明記することが大切である。(2)(ii) では距離が $|q|$ であるため、 $q < 0$ を雑に扱うと誤答になりやすい。さらに $p = 0$ では 2 円が原点で接するだけの場合があるので、 $q = a$ を別扱いするのが最大の注意点である。