

九州大学 2000 年度 理系

解答

全 9 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

係数が 0 か 1 である x の整式を、ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は、偶数の係数を 0 でおきかえ、奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は、このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。例えば、 $5x^2 + 4x + 3$ と $x^2 - 1$ とは対応する M 多項式が共に $x^2 + 1$ となるので、合同である。

M 多項式は、2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい、可約でないとき既約であるという。例えば、 $x^2 + 1$ は $(x + 1)^2$ と合同であるから、可約である。

- (1) $x^2 + x + 1$ は既約な M 多項式であることを示せ。
- (2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。
- (3) $x^4 + x + 1$ は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

係数を 2 で割った余りだけを見る問題なので、実質的には係数が 0 か 1 の多項式を、係数の偶奇だけで計算する。2 次が可約なら 1 次因数をもつため、 $x = 0, 1$ を代入して判定できる。3 次でも可約なら必ず 1 次因数をもつので同じ判定でよい。4 次では 1 次因数の有無に加え、1 次因数をもたずに可約となる場合、2 次式どうしの積に限られることを使い、唯一の 2 次既約多項式 $x^2 + x + 1$ の平方と比較する。

【解答】

以下では、係数を 2 で割った余りだけを考える。すなわち、係数の計算では $1 + 1 = 0$ とみなしてよい。

(1) $x^2 + x + 1$ が可約であるとする、2 次式であるから 1 次の M 多項式を因数にもつ。1 次の M 多項式は x , $x + 1$ だけである。

ところが、 $x = 0$ を代入すると $0^2 + 0 + 1 = 1$ であり、 $x = 1$ を代入すると $1^2 + 1 + 1 = 1$ である。したがって x も $x + 1$ も因数ではない。よって $x^2 + x + 1$ は既約である。

(2) 1 次の M 多項式は x , $x + 1$ であり、これらは 1 次以上の 2 つの多項式の積には分解できないので既約である。

2 次の M 多項式を調べる。定数項が 0 なら x を因数にもつので可約である。また $x^2 + 1 = (x + 1)^2$ で可約である。残る $x^2 + x + 1$ は (1) より既約である。したがって 2 次の既約なものは $x^2 + x + 1$ だけである。

3 次の M 多項式が可約なら、次数の分け方は 1 次と 2 次であるから、必ず 1 次因数をもつ。したがって $x = 0$ または $x = 1$ を代入して 0 になるものは可約であり、どちらでも 0 にならないものが既約である。定数項は 1 でなければならないので候補は $x^3 + 1$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$ である。このうち $x^3 + 1$ と $x^3 + x^2 + x + 1$ は $x = 1$ で 0 になるので可約である。一方 $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$ は $x = 0, 1$ のどちらを代入しても 0 にならない。よって既約である。

以上より、1 次から 3 次までの既約な M 多項式は x , $x + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$ である。

(3) $F(x) = x^4 + x + 1$ とおく。まず $F(0) = 1$, $F(1) = 1 + 1 + 1 = 1$ であるから、 $F(x)$ は 1 次因数をもたない。

もし $F(x)$ が可約なら、4 次式で 1 次因数をもたないので、2 次の既約 M 多項式どうしの積と合同でなければならない。2 次の既約 M 多項式は $x^2 + x + 1$ だけである。そこで $(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ を係数の偶奇で見ると $(x^2 + x + 1)^2 \equiv x^4 + x^2 + 1$ である。これは $x^4 + x + 1$ と一致しない。

したがって $x^4 + x + 1$ は可約ではない。すなわち既約な M 多項式である。

▶ 解法 2 (次数別の因子候補の全列挙)

【方針】

次数ごとに候補を列挙し、可約ならどの次数の因子が必要かを先に固定する。1 次因子は $x, x+1$ の 2 個しかない。4 次で 1 次因子がなければ、2 次既約式どうしの積だけを調べればよい。

【解答】

係数の偶奇だけを計算する。

(1) 2 次式が可約なら 1 次因子をもつ。1 次 M 多項式は $x, x+1$ だけであるが、

$$(x^2 + x + 1)|_{x=0} = 1, \quad (x^2 + x + 1)|_{x=1} = 1$$

なので、どちらも因子ではない。従って $x^2 + x + 1$ は既約である。

(2) 1 次式 $x, x+1$ は既約である。2 次では定数項 0 の式は x を因子にもち、

$$x^2 + 1 \equiv (x+1)^2$$

だから、既約なのは $x^2 + x + 1$ だけである。

3 次式が可約なら 1 次因子をもつ。定数項 1 の 4 候補を $x=1$ で調べると、

$$x^3 + 1, \quad x^3 + x^2 + x + 1$$

は可約であり、

$$x^3 + x + 1, \quad x^3 + x^2 + 1$$

は $x=0, 1$ のどちらでも 0 にならないので既約である。従って答は

$$x, \quad x+1, \quad x^2 + x + 1, \quad x^3 + x + 1, \quad x^3 + x^2 + 1$$

である。

(3) $F(x) = x^4 + x + 1$ は $F(0) = F(1) = 1$ なので 1 次因子をもたない。可約なら 2 次既約式 2 個の積であるが、2 次既約式は $x^2 + x + 1$ だけである。

$$(x^2 + x + 1)^2 \equiv x^4 + x^2 + 1 \neq x^4 + x + 1.$$

従って $x^4 + x + 1$ は既約である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安は 25 分。係数の偶奇だけを見る、つまり 2 で割った余りの世界で因数分解を考える問題である。2 次・3 次では 1 次因数の有無を $x=0, 1$ の代入で判定できる。4 次では「1 次因数がないなら、可約の場合は 2 次×2 次に限られる」と言えるかが山場である。低次の候補を全部書き出す作業を省くと漏れやすいので、答案では候補の除外理由を明示したい。

【第 2 問】

定数 a, b を係数とする 2 次関数 $y = -ax^2 + b$ のグラフが、原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) a, b の条件式、および接点の座標を求めよ。
- (2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を、 y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。
- (3) V を最小にする a, b の値、およびそのときの V の値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

円と放物線が左右対称に 2 点で接するので、 y を用いて交点条件を 1 つの 2 次方程式にする。接する条件はその 2 次方程式が重解をもつことであり、ここから $b = a + 1/(4a)$ と接点の高さが得られる。回転体の体積は、放物線と x 軸で囲まれる部分を y 軸のまわりに回すので、円筒殻の考えで

$$2\pi \int x(-ax^2 + b) dx$$

を計算する。最後に $a > 1/2$ の範囲で 1 変数関数を微分して最小値を求める。

【解答】

(1) 円は $x^2 + y^2 = 1$ であり、放物線は $y = -ax^2 + b$ である。放物線の式から $x^2 = \frac{b-y}{a}$ である。これを円の式に代入すると $\frac{b-y}{a} + y^2 = 1$ すなわち $ay^2 - y + b - a = 0$ である。

放物線が円に異なる 2 点で接するには、この y についての 2 次方程式が重解をもつ必要がある。判別式を 0 にして $1 - 4a(b - a) = 0$ だから $b = a + \frac{1}{4a}$ である。重解は $y = \frac{1}{2a}$ である。したがって接点は $\left(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}, \frac{1}{2a}\right)$ である。異なる 2 点で接するためには平方根の中が正でなければならないので $a > \frac{1}{2}$ である。

(2) 放物線が x 軸と交わる点は $-ax^2 + b = 0$ より $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ である。求める領域を y 軸のまわりに回す。左右対称なので、右半分の縦細片を回転させる円筒殻で考えると

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{b/a}} x(-ax^2 + b) dx$$

である。計算すると

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left[-\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{b/a}} \\ &= 2\pi \left(-\frac{a}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{\pi b^2}{2a} \end{aligned}$$

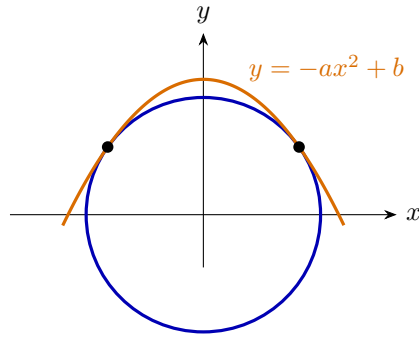
である。 $b = a + 1/(4a)$ を代入して $V = \frac{\pi}{2a} \left(a + \frac{1}{4a} \right)^2$ である。

(3) $V = \frac{\pi}{2} \left(a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{16a^3} \right)$ である。 $a > 1/2$ で微分すると $V' = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2a^2} - \frac{3}{16a^4} \right)$ である。 $V' = 0$ は $16a^4 - 8a^2 - 3 = 0$ であり、 $u = a^2$ とおくと $16u^2 - 8u - 3 = 0$ である。正の解は $u = \frac{3}{4}$ なので $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。 $a > 1/2$ で V' はこの点の前で負、後で正となるので、ここで最小値をとる。

このとき $b = a + \frac{1}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。また

$$V_{\min} = \frac{\pi b^2}{2a} = \frac{\pi \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

である。



▶ 解法 2 (接線傾斜と水平断面)

【方針】

接点 (u, v) で円と放物線の接線の傾きを一致させる。体積は水平断面の円板で求め、最後は 1 変数の微分へ帰着する。

【解答】

(1) 接点を (u, v) とする。異なる 2 接点なので $u \neq 0$ である。円の接線の傾きは $-u/v$ 、放物線の接線の傾きは $-2au$ だから

$$v = \frac{1}{2a}.$$

$u^2 + v^2 = 1$ より

$$u = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}},$$

従って $a > 1/2$ である。また

$$b = v + au^2 = a + \frac{1}{4a}.$$

(2) 高さ y の水平断面を回転すると、半径 $\sqrt{(b-y)/a}$ の円板になる。よって

$$V = \pi \int_0^b \frac{b-y}{a} dy = \frac{\pi b^2}{2a} = \frac{\pi}{2a} \left(a + \frac{1}{4a} \right)^2.$$

(3)

$$\frac{2V}{\pi} = a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{16a^3}.$$

微分すると停留条件は

$$16a^4 - 8a^2 - 3 = 0.$$

$a > 1/2$ にある解は

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

導関数はこの点の前後で負から正へ変わるの最小である。

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad V_{\min} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 6。目安は 25 分。接点条件を直接接線で処理するより、円と放物線の交点方程式が重解をもつと見ると計算が短い。異なる 2 点で接する条件から $a > 1/2$ が必要になる点を落とさないこと。体積は回転軸が y 軸なので、円筒殻で $2\pi x$ を掛けると自然に計算できる。最小化では a^2 に置くと式が安定する。

【第 3 問】

n を自然数として、 $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x < 1$ において、

$$f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $\log$ は自然対数を表す。

(2) $|x| \leq \frac{1}{3}$ とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

(i) $x \geq 0$ において、

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

(ii) $x < 0$ において、

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$(iii) \left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

(3) この不等式を用いて、 $\log 2$ の近似値を誤差が $\frac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) は等比数列の有限和 $1/(1-t) = 1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n/(1-t)$ を積分して示す。(2) は $|x| \leq 1/3$ の範囲で $1/(1-t)$ を上から評価し、正の場合と負の場合で積分区間の向きに注意する。(iii) は (1) を x と $-x$ に適用して余り積分の差にする。(3) では $(1+x)/(1-x) = 2$ となる $x = 1/3$ を選び、奇数次だけが残る $f(x) - f(-x)$ を使って $\log 2$ を近似する。

【解答】

(1) $t < 1$ で $\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}+\frac{t^n}{1-t}$ が成り立つ。これを 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

である。左辺は $-\log(1-x)$ であり、中央の和は $f(x)$ である。したがって

$$f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

である。

(2) (i) $0 \leq x \leq 1/3$ とする。この範囲では $0 \leq t \leq x \leq 1/3$ なので $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ である。よって

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3}{2} \int_0^x t^n dt = \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

である。

(ii) $-1/3 \leq x < 0$ とする。積分区間の向きに注意すると

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{|1-t|} dt$$

である。 $t \leq 0$ では $|1-t| = 1-t \geq 1$ だから

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \int_x^0 |t|^n dt = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

である。

(iii) (1) を x と $-x$ に適用する。

$$f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

であり、

$$f(-x) = -\log(1+x) - \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t} dt$$

である。差を取ると

$$f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt + \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t} dt$$

である。

右辺の絶対値は、(i)(ii) の評価を合わせて

$$\frac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

以下である。したがって

$$\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

である。

(3) $\frac{1+x}{1-x} = 2$ となる x は $x = \frac{1}{3}$ である。 $n = 3$ とすると、(2)(iii) より誤差は $\frac{5(1/3)^4}{2(3+1)} = \frac{5}{648} < \frac{1}{100}$ である。

このとき $f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right)$ では偶数次の項が消え、奇数次の項だけが 2 倍される。 $n = 3$ だから

$$f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} \right) = \frac{56}{81}$$

である。よって $\log 2 \simeq \frac{56}{81}$ とすれば、誤差は $1/100$ 以下である。

▶ 解法 2 (奇数次対数級数と余項評価)

【方針】

有限等比級数を積分して誤差項を得る。 $\log 2$ については $x = 1/3$ の奇数次級数を直接使い、残りを等比級数で上から抑える。

【解答】

(1)

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j + \frac{t^n}{1-t}$$

を 0 から $x < 1$ まで積分すると

$$-\log(1-x) = f(x) + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt,$$

従って所要の式を得る。

(2) $0 \leq t \leq x \leq 1/3$ では

$$\frac{1}{1-t} \leq \frac{3}{2}$$

だから

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}.$$

$-1/3 \leq x < 0$ では $1-t \geq 1$ より

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

(1) を $x, -x$ へ適用して三角不等式を使えば

$$\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}.$$

(3)

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \quad (|x| < 1)$$

である。 $x = 1/3$ とし、最初の 2 項を取ると

$$2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} \right) = \frac{56}{81}.$$

残りは

$$0 < 2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(1/3)^{2j+1}}{2j+1} \leq \frac{2}{5} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{2j+1} = \frac{1}{540} < \frac{1}{100}.$$

よって $\log 2$ の所要の近似分数は $56/81$ である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 7。目安は 30 分。有限等比和の余りを積分する発想が (1) の中心であり、以後はその余りをどれだけ正確に抑えるかの問題になる。 $x < 0$ の場合は積分の向きと絶対値の扱いを丁寧に書くこと。 $\log 2$ では $x = 1/3$ を選ぶと、 $f(x) - f(-x)$ で偶数次が消えて計算が軽くなる。誤差評価を先に確認してから分数を出す流れが安全である。

【第 4 問 (a)】

複素数 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ と、それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し $\alpha = z + \bar{z}$ とする。

- (1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。
- (2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち、そのいずれも有理数ではないことを示せ。
- (3) 有理数を係数とする 2 次方程式で、 α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

$\alpha = z + \bar{z} = 2 \cos 20^\circ$ と見て、3 倍角公式から 3 次方程式を作る。(2) では符号変化で 3 つの実数解があることを示し、有理根定理で有理数解がないことを確認する。(3) は背理法で、もし α が有理数係数 2 次方程式の解なら、3 次式 $x^3 - 3x - 1$ とその 2 次式が共通根をもつ。割り算の余りを考えると、有理数解または有理係数 1 次因子が出てしまい、(2) と矛盾する。

【解答】

(1) $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ なので $\bar{z} = \cos 20^\circ - i \sin 20^\circ$ である。したがって $\alpha = z + \bar{z} = 2 \cos 20^\circ$ である。

3 倍角公式 $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \cos 3\theta$ に $\theta = 20^\circ$ を代入する。 $\alpha = 2 \cos 20^\circ$ だから $\alpha^3 - 3\alpha = 2 \cos 60^\circ = 1$ である。よって α は $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解である。

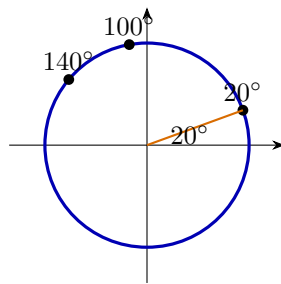
(2) $F(x) = x^3 - 3x - 1$ とおく。 $F(-2) = -3$, $F(-1) = 1$ なので、 -2 と -1 の間に実数解がある。また $F(-1) = 1$, $F(0) = -1$ なので、 -1 と 0 の間にも実数解がある。さらに $F(1) = -3$, $F(2) = 1$ なので、 1 と 2 の間にも実数解がある。3 次方程式の解は高々 3 個なので、この方程式は 3 個の実数解をもつ。

次に有理数解がないことを示す。 $F(x)$ は最高次係数 1、定数項 -1 の整数係数多項式である。有理数解をもつなら、その解は整数で、しかも ± 1 に限られる。しかし $F(1) = 1 - 3 - 1 = -3$, $F(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$ である。したがって有理数解はない。よって 3 個の実数解はいずれも有理数ではない。

(3) 背理法で示す。 α を解にもつ有理数係数の 2 次方程式が存在すると仮定する。その左辺を $G(x)$ とする。必要なら定数倍して、 $G(x)$ は有理数係数の 2 次式であるとしてよい。 $F(x) = x^3 - 3x - 1$ を $G(x)$ で割ると、余りは高々 1 次の有理数係数多項式である。これを $R(x)$ とする。 $F(\alpha) = 0$, $G(\alpha) = 0$ だから $R(\alpha) = 0$ である。

もし $R(x)$ が 0 でない 1 次式なら、 $R(\alpha) = 0$ より α は有理数である。これは (2) に反する。もし $R(x)$ が 0 でない定数なら、 $R(\alpha) = 0$ は不可能である。したがって余りは 0 でなければならない。

余りが 0 なら、 $G(x)$ は $F(x)$ を割り切る。すると $F(x)$ は有理数係数の 1 次式を因数にもつので、有理数解をもつことになる。これも (2) に反する。よって仮定は誤りであり、 α を解とする有理数係数の 2 次方程式は存在しない。



▶ 解法 2 (単位根と既約 3 次多項式)

【方針】

$z = e^{20^\circ i}$ として $z^3 + z^{-3} = 1$ を利用する。得られる 3 次式に有理根がないことから、既約性と 2 次方程式の不存在をまとめて示す。

【解答】

(1) $\alpha = z + z^{-1}$ である。恒等式

$$(z + z^{-1})^3 - 3(z + z^{-1}) = z^3 + z^{-3}$$

と

$$z^3 + z^{-3} = 2 \cos 60^\circ = 1$$

より

$$\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0.$$

(2) $x^3 - 3x - 1 = 0$ の 3 根は

$$2 \cos 20^\circ, \quad 2 \cos 100^\circ, \quad 2 \cos 140^\circ$$

で、相異なる実数である。有理根があれば有理根定理から ± 1 に限るが、どちらも代入して 0 にならない。従って 3 根はいずれも無理数である。

(3) $x^3 - 3x - 1$ は有理根をもたない 3 次式なので、有理数係数上で既約である。もし α が有理数係数の 2 次方程式を満たせば、その 2 次式と上の既約 3 次式は α を共通根にもつ。両式の最大公約多項式は 1 次以上になるが、既約 3 次式の約数は定数倍を除き 1 と自分自身だけであり、次数 2 の式を割れない。矛盾である。従ってそのような 2 次方程式は存在しない。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安は 25 分。 $2 \cos 20^\circ$ と 3 倍角公式を結びつけることが入口である。(2) では 3 つの実数解の存在と、有理数解がないことを別々に示す必要がある。(3) は「2 次方程式があるなら 3 次式と共通因子をもつ」という発想で、割り算の余りを使うと背理法が明確になる。

【第 4 問 (b)】

1 から n までの数で m 個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として、下記のことを考えた。ただし、 S は順列を表し、算法の開始の時は数を含まない (S は空であるという) とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法 [以下 (a), (b), (c), $\dots$ の順に行う]

- (a) S を空とし、 $j = n - m + 1$ とする。
 - (b) 1 から j までの数からデタラメに数 t を選ぶ。
 - (c) t が順列 S に入っているならば、 t の直後に j を入れ、そうでないならば、 t を S の先頭に入れる。
 - (d) j を 1 増やす。
 - (e) $j \leq n$ ならば、(b) へもどる。 $j > n$ ならば、終了する。
- (1) $n = 10$, $m = 6$ の場合で (b) において選ばれた数 t は順に 4, 3, 6, 3, 2, 5 であった。その結果として得られる順列 S はどのような順列か。
- (2) $n = 10$, $m = 6$ の場合で結果として得られた順列 S が 827593 であった。(b) で選ばれた数 t の列は何であったか。
- (3) 算法の結果として得られた順列 S から (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

算法をそのまま追う問題である。(1) では $j = n - m + 1$ から n まで、選ばれた t が現在の順列に含まれるかを毎回判定して挿入位置を決める。(2) では逆向きに、最大の j から順に取り除く。 j が順列中にあればその直前の数が選ばれた t 、 j がなければ先頭に入った数そのものが t である。一般の復元算法もこの逆操作を記述すればよい。

【解答】

(1) $n = 10$, $m = 6$ なので、最初は $j = n - m + 1 = 5$ である。選ばれた t は順に 4, 3, 6, 3, 2, 5 である。

順に操作する。はじめ S は空である。 $j = 5$, $t = 4$ のとき、4 は S に入っていないので 4 を先頭に入れる。 $S = 4$ $j = 6$, $t = 3$ のとき、3 は入っていないので $S = 34$ である。 $j = 7$, $t = 6$ のとき、6 は入っていないので $S = 634$ である。 $j = 8$, $t = 3$ のとき、3 は S に入っているの、3 の直後に 8 を入れて $S = 6384$ となる。 $j = 9$, $t = 2$ のとき、2 は入っていないので $S = 26384$ である。最後に $j = 10$, $t = 5$ のとき、5 は入っていないので $S = 526384$ となる。したがって得られる順列は 526384 である。

(2) 逆向きに考える。結果が $S = 827593$ である。最後に処理された j は 10 であるが、10 は S に含まれていない。したがって最後の操作では、選ばれた t が先頭に入れられて消えた形であり、最後の t は先頭の 8 である。8 を取り除いて $S = 27593$ となる。

次に $j = 9$ を戻す。9 は順列中にあり、その直前は 5 である。よってこの段階の t は 5 であり、9 を取り除いて $S = 2753$ となる。次に $j = 8$ は含まれていないので、先頭の 2 がその段階の t であり、2 を取り除いて $S = 753$ となる。次に $j = 7$ は含まれているが、先頭にあるので、7 は「 t の直後に入った」のではなく、 $t = 7$ 自身が先頭に入った場合である。したがってこの段階の t は 7 であり、7 を取り除く。 $S = 53$ 次に $j = 6$ は含まれていないので、先頭の 5 が t であり、5 を取り除く。 $S = 3$ 最後に $j = 5$ は含まれていないので、先頭の 3 が t である。

以上は後ろから復元した値なので、元の順に並べると 3, 5, 7, 2, 5, 8 である。

(3) 結果として得られた順列を S とする。復元は次の手順で行えばよい。 $j = n, n-1, \dots, n-m+1$ の順に処理する。各段階で、もし j が現在の S の中にあり、しかも直前に数があるなら、その直前の数をその段階の t として記録し、 j を S から取り除く。もし j が S に含まれない、または j が先頭にあるなら、現在の S の先頭の数そのものをその段階の t として記録し、その先頭の数そのものを S から取り除く。

この操作で得られる t の列は後ろからの列なので、最後に逆順に並べれば、(b) で選ばれた数の列が復元される。

▶ 解法 2 (挿入履歴を逆向きにたどる表)

【方針】

各挿入を「新しい j の親を t として記録する操作」と見る。逆向きには最大の j から削除すれば、その直前の数、または先頭の数が一意に元の t を与える。

【解答】

(1) 各段階の順列を表にすると

j	t	S
5	4	4
6	3	34
7	6	634
8	3	6384
9	2	26384
10	5	526384

となる。従って $S = 526384$ である。

(2) 最終順列から $j = 10, 9, \dots, 5$ の順に逆操作する。

j	復元した t	削除後の S
10	8	27593
9	5	2753
8	2	753
7	7	53
6	5	3
5	3	$\emptyset$

逆順に読んで、選ばれた列は

3, 5, 7, 2, 5, 8

である。

(3) $j = n, n-1, \dots, n-m+1$ と下げる。現在の S で j が先頭以外にあれば、その直前の数を t_j として記録し j を削除する。 j がない、または先頭にあるなら、先頭の数 t_j を記録し、その先頭を削除する。最後に

$$t_{n-m+1}, t_{n-m+2}, \dots, t_n$$

の順へ並べ直せばよい。各逆操作は前向き操作のちょうど逆なので、復元列は一意である。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。目安は 15 分。順方向の操作は単純だが、 t がすでに順列にある場合だけ「 j を直後に挿入する」点を丁寧に追う必要がある。逆操作では、大きい j から戻すのが自然である。 j が先頭にある場合は「直前の数」がないので、 j 自身が先頭に入った場合として処理する。この例外を明記できるかどうかは復元算法の完成度を左右する。

【第 4 問 (c)】

a, b, c を 0 でない実数として、空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ をとる.

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとき、この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ.
- (2) (1) における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ.
- (3) (1) における P について、四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

一般の切片 a, b, c でも、点 $P = (x, y, z)$ を置いて内積条件を展開し、平方完成する方針は同じである。球の中心 Q と半径を文字で求め、 Q が平面 ABC 上にあることを切片形の平面方程式で確認する。体積の最大値は、底面 ABC の面積と、球面から平面までの最大距離、すなわち球の半径との積で決まる。

【解答】

(1) $P = (x, y, z)$ とおく。このとき $\overrightarrow{AP} = (x-a, y, z)$ であり、 $\overrightarrow{BP} = (x, y-b, z)$, $\overrightarrow{CP} = (x, y, z-c)$ だから $\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = (3x, 3y-b, 3z-2c)$ である。よって条件は $(x-a)3x + y(3y-b) + z(3z-2c) = 0$ すなわち $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3ax - by - 2cz = 0$ である。3 で割って平方完成すると $x^2 + y^2 + z^2 - ax - \frac{b}{3}y - \frac{2c}{3}z = 0$ より

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}$$

となる。したがって P は定点 $Q = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{6}, \frac{c}{3}\right)$ から一定距離 $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}}$ にある。

(2) 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ を通る平面は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ である。 a, b, c は 0 でないので、この式は有効である。 Q を代入すると $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$ となる。よって Q は平面 ABC 上にある。

(3) 底面 $\triangle ABC$ の面積を求める。 $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ であるから、底面積は $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$ である。

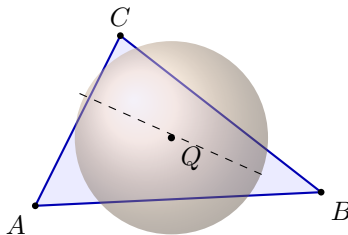
(2) より、球の中心 Q は底面の平面上にある。したがって球面上の点 P から平面 ABC までの距離の最大値は、球の半径 $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}}$ である。よって四面体の体積の最大値は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}}$$

すなわち

$$\frac{1}{6} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}}$$

である。



▶ 解法 2 (直交ベクトルとアフィン結合)

【方針】

座標成分を個別に展開せず、互いに直交する $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いる。球の中心をアフィン結合として読めば、平面条件も直ちに従う。

【解答】

位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ とする。3 点は座標軸上にあるから相互に直交する。従って

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (3\vec{p} - \vec{b} - 2\vec{c}) = 0$$

は

$$3|\vec{p}|^2 - \vec{p} \cdot (3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = 0$$

となる。

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

とおけば

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{q}|^2.$$

(1)

$$Q = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{6}, \frac{c}{3} \right), \quad \rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}}$$

であり、軌跡は中心 Q 、半径 ρ の球面である。

(2) $\vec{q}$ における $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数の和は 1 なので、 Q は平面 ABC 上にある。

(3)

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

中心が底面上にあるため、球面上の点から平面までの距離の最大値は ρ である。従って最大体積は

$$\frac{1}{6} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{9}}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 7。目安は 25 分。特殊な数値ではなく文字 a, b, c のまま平方完成するため、係数 $b/6, c/3$ を間違えやすい。中心が平面上にあることを確認してから体積最大へ進むと、最大高さが球の半径である理由が明確になる。底面積と半径を別々に求め、最後に $1/3$ を掛ける構成が最も安全である。

【第 5 問 (a)】

発芽して一定期間後の、ある花の苗の高さの分布は母平均 m (cm)、母標準偏差 $\sigma = 1.5$ (cm) の正規分布であるとする。

- (1) 花壇に植えるとき、高さが 7.3cm より低い苗と 13.0cm より高い苗は間引くとする。 $m = 10$ (cm) としたとき、苗が間引かれる確率を求めよ。
- (2) 母平均 m が未知であったため、大きさ n の標本を任意抽出して、信頼度 95 % の m に対する信頼区間を求めたところ、 $[9.81, 10.79]$ であった。標本平均 $\bar{x}$ の値と n を求めよ。
- (3) 赤花と白花を交配して得られた種子と、赤花同志の交配で得られた種子をまいて育てた苗の花の色を調べた。赤白交配の種子を 1、赤花のみからの種子を 0 とし、咲いた花の色については、赤白混じったものは 1、赤のみであれば 0 とし、観察した結果は以下の通りとなった。種子の種類と咲いた花の色の相関係数を求めよ。
正規分布表 $P(0 \leq U \leq u_0)$:

種子の種類	1	1	1	1	1	1	1	0	0
花の色	1	1	1	1	1	0	0	0	0

正規分布表より $P(0 \leq U \leq 1.8) = 0.4641$, $P(0 \leq U \leq 2.0) = 0.4772$, $P(0 \leq U \leq 1.96) = 0.4750$.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) は標準化 $U = (X - m)/1.5$ によって正規分布表を読む。(2) は 95 % 信頼区間の中心が標本平均、半幅が $1.96 \cdot 1.5/\sqrt{n}$ であることから $\bar{x}$ と n を求める。(3) は 0-1 データなので、平均、 XY の平均、分散を表から直接計算する。相関係数は共分散を 2 つの標準偏差の積で割る。

【解答】

(1) 苗の高さを X とする。 $m = 10$ 、 $\sigma = 1.5$ なので $U = \frac{X - 10}{1.5}$ は標準正規分布に従う。間引かれない条件は $7.3 \leq X \leq 13.0$ である。これを標準化すると $\frac{7.3 - 10}{1.5} = -1.8$, $\frac{13.0 - 10}{1.5} = 2.0$ だから $P(7.3 \leq X \leq 13.0) = P(-1.8 \leq U \leq 2.0)$ である。正規分布表より

$$P(-1.8 \leq U \leq 2.0) = P(0 \leq U \leq 1.8) + P(0 \leq U \leq 2.0) = 0.4641 + 0.4772 = 0.9413$$

である。したがって間引かれる確率は $1 - 0.9413 = 0.0587$ である。

(2) 信頼区間 $[9.81, 10.79]$ の中心が標本平均である。したがって $\bar{x} = \frac{9.81 + 10.79}{2} = 10.30$ である。また半幅は $10.79 - 10.30 = 0.49$ である。母標準偏差が 1.5 と分かっているので、信頼度 95 % の信頼区間の半幅は $1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}}$ である。よって $1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} = 0.49$ であり、 $\sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 1.5}{0.49} = 6$ となる。したがって $n = 36$ である。

(3) 種子の種類を X 、花の色を Y とする。表では $X = 1$ が 8 個、 $X = 0$ が 2 個であるから $\bar{X} = \frac{8}{10} = 0.8$ である。また $Y = 1$ は 6 個なので $\bar{Y} = \frac{6}{10} = 0.6$ である。さらに $XY = 1$ となるのは、 $X = 1$ かつ $Y = 1$ の 6 個であるから $\overline{XY} = \frac{6}{10} = 0.6$ である。

したがって共分散は $\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y} = 0.6 - 0.8 \cdot 0.6 = 0.12$ である。0-1 データでは $X^2 = X$ 、 $Y^2 = Y$ なので $\sigma_X = \sqrt{0.8 - 0.8^2} = \sqrt{0.16} = 0.4$ であり、 $\sigma_Y = \sqrt{0.6 - 0.6^2} = \sqrt{0.24} = \frac{\sqrt{6}}{5}$ である。よって相関係数は

$$\frac{0.12}{0.4 \cdot \sqrt{6}/5} = \frac{3/25}{2\sqrt{6}/25} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

である。

▶ 解法 2 (2×2 分割表のファイ係数)

【方針】

(1)(2) は標準化と信頼区間の中心・半幅を使う。(3) は 0-1 データの相関係数を、2×2 分割表の ϕ 係数として直接計算する。

【解答】

(1)

$$U = \frac{X - 10}{1.5}$$

とすると、残す範囲は $-1.8 \leq U \leq 2.0$ である。

$$P(-1.8 \leq U \leq 2.0) = 0.4641 + 0.4772 = 0.9413.$$

従って間引かれる確率は

$$1 - 0.9413 = 0.0587.$$

(2) 区間の中心と半幅から

$$\bar{x} = \frac{9.81 + 10.79}{2} = 10.30, \quad 0.49 = \frac{1.96 \cdot 1.5}{\sqrt{n}}.$$

従って $\sqrt{n} = 6$ 、すなわち $n = 36$ である。

(3) 2×2 分割表の度数は

	$Y = 1$	$Y = 0$
$X = 1$	6	2
$X = 0$	0	2

である。0-1 変数の相関係数は ϕ 係数に等しいから

$$r = \frac{6 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{\sqrt{(6+2)(0+2)(6+0)(2+2)}} = \frac{12}{\sqrt{384}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 5。目安は 18 分。正規分布表は中央から右側の面積で与えられているので、負の側は対称性を使って読む。(2) では区間の中心と半幅を分けること。(3) は 0-1 データなので、平均や分散を表から直接数えられる。 $XY = 1$ の個数を「両方 1」の個数として数えると共分散がすぐに出る。

【第 5 問 (b)】

平面上の点の極座標を、原点 O からの距離 r (≥ 0) と偏角 θ を用いて (r, θ) で表す。

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2 \cos(\pi + \theta), \quad C_2 : r = 2(\cos \theta + 1) \quad \left(\text{ただし, } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

の概形を描き、この 2 曲線 C_1, C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 P_1, P_2, E の極座標をそれぞれ $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), (1, 0)$ とするとき、三角形 OEP_1 と三角形 OP_2Q とが相似となる点 Q を $P_1 * P_2$ で表す。点 $P_1 * P_2$ の極座標を求めよ。ただし、点 Q は $\angle EOP_1 = \angle P_2OQ$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 O, P_1, P_2 が同一直線上にないとき、四角形 OP_1RP_2 が平行四辺形となるような点 R を $P_1 \circ P_2$ で表す。 P_1, P_2 の極座標が $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき、点 $P_1 \circ P_2$ の極座標を求めよ。

(4) さらに、平面上の点 P の極座標を (r, θ) として、実数 k に対し点 kP を、 $k \geq 0$ のときは極座標が (kr, θ) となる点、 $k < 0$ のときは $(|k|r, \theta + \pi)$ となる点とする。(1) で求めた 2 曲線 C_1, C_2 の交点を V として、点 $k(V \circ (V * V))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) は極方程式を直交座標へ直し、 C_1 が中心 $(-1, 0)$ 、半径 1 の円であることを読む。交点は同じ θ で 2 つの r が一致する条件から求める。(2) は相似比と偏角の加法を使い、 $*$ が極座標の積に対応することを示す。(3) は同じ長さの 2 ベクトルの和を、二等辺三角形の対角線として表す。(4) は交点 V 、 $V * V$ 、 $V \circ (V * V)$ を順に求め、最後に符号つき拡大 kP が C_1 上に乗る条件を調べる。

【解答】

(1) $C_1 : r = 2 \cos(\pi + \theta) = -2 \cos \theta$ である。両辺に r を掛けると $r^2 = -2r \cos \theta$ であり、 $x = r \cos \theta$ 、 $r^2 = x^2 + y^2$ より $x^2 + y^2 = -2x$ である。すなわち $(x+1)^2 + y^2 = 1$ で、中心 $(-1, 0)$ 、半径 1 の円である。

一方 $C_2 : r = 2(1 + \cos \theta)$ である。交点では $-2 \cos \theta = 2(1 + \cos \theta)$ だから $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ である。与えられた範囲 $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ では $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 、 $\theta = \frac{4\pi}{3}$ であり、このとき $r = -2 \cos \theta = 1$ である。したがって交点の極座標は $\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ 、 $\left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$ である。

(2) 点 E は極座標 $(1, 0)$ なので $OE = 1$ である。三角形 OEP_1 と OP_2Q が相似で、 OE に対応する辺が OP_2 、 OP_1 に対応する辺が OQ であるから $\frac{OQ}{OP_1} = \frac{OP_2}{OE} = r_2$ である。よって $OQ = r_1 r_2$ である。

また、向きも込めて $\angle EOP_1 = \theta_1$ であり、これが $\angle P_2OQ$ に等しいので、 Q の偏角は $\theta_2 + \theta_1$ である。したがって $P_1 * P_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$ である。

(3) P_1 、 P_2 を原点から出るベクトルと見れば、平行四辺形 OP_1RP_2 の点 R はベクトル和 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ である。 $r_1 = r_2 = r$ なので、2 つの同じ長さのベクトルの和は、偏角の平均方向を向く。長さは余弦定理、または二等辺三角形から $2r \left| \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|$ である。

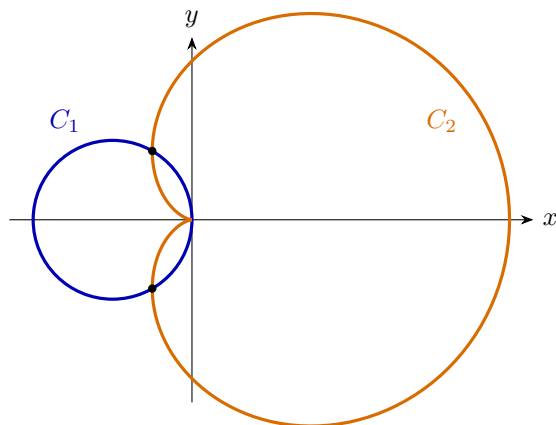
したがって、 $\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \geq 0$ の表示では

$$P_1 \circ P_2 = \left(2r \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)$$

である。もしこの余弦が負になる表示を用いる場合は、距離を正にするため偏角を π だけ加えればよい。

(4) 交点の一つを $V = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ とする。もう一つを選んでも同じ結果になる。まず (2) より $V * V = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$ である。次に (3) より、偏角 $2\pi/3$ と $4\pi/3$ の単位ベクトルの和は、負の x 軸方向の長さ 1 のベクトルである。したがって $V \circ (V * V) = (1, \pi)$ である。

点 $k(V \circ (V * V))$ を考える。 $k > 0$ のとき、この点の極座標は (k, π) である。これが C_1 上にあるには $k = -2 \cos \pi = 2$ が必要十分である。 $k = 0$ では原点であり、与えられた C_1 の交点としては現れない。 $k < 0$ のときは点は正の x 軸上に移るが、円 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ は正の x 軸上の正の点を含まない。したがって条件は $k = 2$ である。



▶ 解法 2 (複素数の積と和)

【方針】

点を複素数 $re^{i\theta}$ と同一視する。 $*$ は複素数の積、 $\circ$ は和になるため、(2) 以降を代数演算で一括する。

【解答】

(1)

$$C_1 : r = -2 \cos \theta$$

なので

$$x^2 + y^2 = -2x, \quad (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

C_2 は $r = 2(1 + \cos \theta)$ のカージオイドである。交点では

$$-2 \cos \theta = 2(1 + \cos \theta)$$

より

$$(r, \theta) = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right), \left(1, \frac{4\pi}{3}\right).$$

(2) P_j に対応する複素数を $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ とする。相似比と有向角の和から

$$P_1 * P_2 \longleftrightarrow z_1 z_2.$$

従って極座標は

$$(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2).$$

(3) 平行四辺形の第 4 頂点は $z_1 + z_2$ である。 $r_1 = r_2 = r$ なら

$$z_1 + z_2 = 2r \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}.$$

半径を正にする必要があれば偏角へ π を加える。

(4) 交点の一つを $v = e^{2\pi i/3}$ とすると

$$v * v = v^2 = e^{4\pi i/3}, \quad v \circ (v * v) = v + v^2 = -1.$$

従って対象点は $-k$ である。円 C_1 の条件は

$$|-k + 1| = 1,$$

従って $k = 0, 2$ である。ただし $k = 0$ は $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ のパラメータ範囲では C_1 に含まれない。よって

$$k = 2.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安は 30 分。極座標では、同じ点でも偏角を変えられるため、距離を常に非負にする処理が必要である。(2) の $*$ は距離の積・偏角の和、(3) の $\circ$ はベクトル和であり、演算の意味を図形から読み取ると計算しやすい。(4) では $V \circ (V * V)$ が $(-1, 0)$ になることを確認し、負の k や $k = 0$ を雑に含めないよう注意する。

【第 5 問 (c)】

3 次単位行列 E の第 1 行の -2 倍を第 3 行に加えた行列を P とする.

(1) $QP = E$ となる行列 Q を求めよ.

(2) 行列 $R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ について, $S = PR$ を求めよ.

(3) 3×3 行列 A と 3×1 行列 B が与えられているとき, $PAX = PB$ を満たす行列 X は, また $AX = B$ を満たすことを示せ.

(4) x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = a \\ -3x + 4y - 5z = b \\ 6x - 5y + 4z = c \end{cases}$$

の係数が作る行列を A として, この方程式を $AX = B$ で表すとき, この両辺に左から P をかけた連立 1 次方程式を書け.

(5) 上と同様の操作を繰り返すことにより, (4) で与えた連立 1 次方程式が解を持つための条件を求め, 解があるときはその解をすべて求めよ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

行基本変形を左から行列を掛ける操作として読む。(1) では第 3 行に第 1 行の -2 倍を加える操作の逆、つまり第 3 行に第 1 行の 2 倍を加える行列を求める。(2) は実際に左から掛けて第 3 行だけが変わることを確認する。(3) は逆行列 Q を左から掛ければ同値性が戻る。(4)(5) では拡大係数行列に同じ行基本変形を続け、最後の行が条件式を与えることを読む。

【解答】

(1) 3 次単位行列の第 1 行の -2 倍を第 3 行に加えるので

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。この操作の逆は、第 1 行の 2 倍を第 3 行に加える操作である。したがって

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、実際に $QP = E$ となる。

(2) 左から P を掛けることは、第 3 行を 第 3 行 $-2 \times$ 第 1 行 に置き換えることである。したがって

$$S = PR = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 - 2a_1 & c_2 - 2a_2 & c_3 - 2a_3 & c_4 - 2a_4 \end{pmatrix}$$

である。

(3) $PAX = PB$ が成り立つとする。両辺に左から Q を掛けると $QPAX = QPB$ である。(1) より $QP = E$ だから $AX = B$ となる。したがって $PAX = PB$ を満たす X は、もとの $AX = B$ も満たす。

(4) 係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とする。左から P を掛けると、第 3 行から第 1 行の 2 倍を引くので

$$PA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - 2a \end{pmatrix}$$

である。したがって連立方程式は

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = a, \\ -3x + 4y - 5z = b, \\ -y + 2z = c - 2a \end{cases}$$

である。

(5) (4) で得た連立方程式をさらに掃き出す。第 1 式と第 2 式を加えると $2y - 4z = a + b$ すなわち $y - 2z = \frac{a+b}{2}$ である。一方、第 3 式は $-y + 2z = c - 2a$ であり、これは $y - 2z = 2a - c$ と同値である。したがって解をもつためには $\frac{a+b}{2} = 2a - c$ が必要である。整理して $b + 2c = 3a$ である。

この条件が成り立つとき、 $z = t$ とおく。第 3 式から $y = 2z - (c - 2a) = 2t + 2a - c$ である。条件 $b + 2c = 3a$ を用いると $2a - c = \frac{a+b}{2}$ なので $y = \frac{a+b}{2} + 2t$ である。第 1 式 $3x - 2y + z = a$ に代入すると $3x - 2\left(\frac{a+b}{2} + 2t\right) + t = a$ であり、 $3x = 2a + b + 3t$ となる。したがって $x = \frac{2a+b}{3} + t$ である。

よって解をもつための条件は $b + 2c = 3a$ であり、この条件が成り立つときの解は $(x, y, z) = \left(\frac{2a+b}{3} + t, \frac{a+b}{2} + 2t, t\right)$ である。ただし t は任意の実数である。

▶ 解法 2 (拡大係数行列の掃き出し)

【方針】

P を第 3 行から第 1 行の 2 倍を引く基本行列として扱う。最後は拡大係数行列を掃き出し、零行が与える整合条件と自由変数を読む。

【解答】

(1) 逆操作は第 3 行へ第 1 行の 2 倍を加えることなので

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$PR = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 - 2a_1 & c_2 - 2a_2 & c_3 - 2a_3 & c_4 - 2a_4 \end{pmatrix}.$$

(3) $PAX = PB$ の両辺へ $Q = P^{-1}$ を左から掛ければ $AX = B$ である。

(4) 第 3 式から第 1 式の 2 倍を引いて

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = a, \\ -3x + 4y - 5z = b, \\ -y + 2z = c - 2a. \end{cases}$$

(5) 第 1 行と第 2 行を加え、第 3 行と比べると

$$y - 2z = \frac{a+b}{2}, \quad y - 2z = 2a - c.$$

従って整合条件は

$$b + 2c = 3a.$$

この条件のもとで $z = t$ とすれば

$$(x, y, z) = \left(\frac{2a+b}{3} + t, \frac{a+b}{2} + 2t, t\right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

【総評】 難度・計算量はいずれも 10 段階中 6。目安 25 分。 P を行基本変形と読めばよい。(3) は逆行列 Q による同値性、(5) は同じ左辺 $y - 2z$ から整合条件 $b + 2c = 3a$ を得る。自由変数を置いた後、元の式で検算する。