

九州大学 2001 年度 文系

解答

全 8 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える.

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ.
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ.
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ.

▶ 解法 1

【方針】

増加条件は導関数 $f'(x)$ が対象区間で常に非負であることに直す。(1) では $f'(x)$ が 2 次式なので、全実数で非負となる条件を、上に開くことと判別式が 0 以下であることから求める。ただし $a = 0$ の退化も確認する。(2) は $a = 0$ の 1 次式を $x > -1$ で調べる。(3) では $u = x + 1 > 0$ と置いて半直線上の 2 次式 $2au^2 + 2(b-a)u + 1 - b$ の最小値を調べ、 $a < 0$ 、 $a = 0$ 、 $a > 0$ で頂点が範囲内に入るかを分ける。

【解答】

(1) $f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b+1$ である。 $f(x)$ がすべての実数でつねに増加するための必要十分条件は、すべての実数 x について $f'(x) \geq 0$ となることである。

まず $a = 0$ のとき、 $f'(x) = 2bx + b + 1$ である。これが全実数で非負となるには傾きが 0 でなければならないので $b = 0$ である。このとき $f'(x) = 1$ で条件を満たす。

次に $a > 0$ のとき、2 次式が全実数で非負となるには判別式が 0 以下であればよい。判別式を 4 で割ったものは $(a+b)^2 - 2a(b+1) = a^2 + b^2 - 2a$ である。よって条件は $a^2 + b^2 - 2a \leq 0$ すなわち $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ である。この条件は $a = 0$ の場合には $b = 0$ だけを含む。したがって求める範囲は $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ であり、 ab 平面では中心 $(1, 0)$ 、半径 1 の円の内部および周である。

(2) $a = 0$ のとき $f'(x) = 2bx + b + 1$ である。 $u = x + 1$ とおくと、 $x > -1$ は $u > 0$ であり、 $f'(x) = 2b(u-1) + b + 1 = 2bu + 1 - b$ となる。

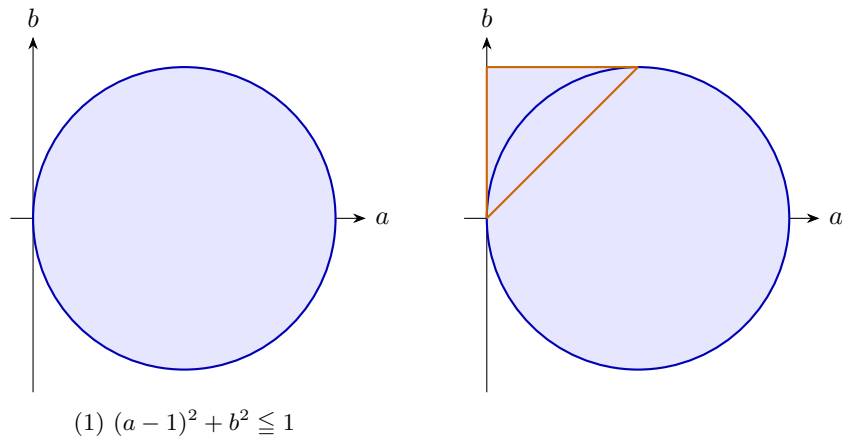
もし $b < 0$ なら、 $u \rightarrow \infty$ で $2bu + 1 - b$ は負になるので不可である。 $b \geq 0$ のとき、この式は u について増加または一定であり、 $u \rightarrow 0+$ での値は $1 - b$ に近づく。したがって全ての $u > 0$ で非負となる条件は $1 - b \geq 0$ である。よって $0 \leq b \leq 1$ である。

(3) $u = x + 1$ とおくと $u > 0$ であり、 $f'(x) = 2a(u-1)^2 + 2(a+b)(u-1) + b + 1 = 2au^2 + 2(b-a)u + 1 - b$ となる。この 2 次式を $Q(u)$ とおく。 $a < 0$ なら、 $u \rightarrow \infty$ で $Q(u) \rightarrow -\infty$ となるため条件を満たさない。 $a = 0$ のときは (2) より $0 \leq b \leq 1$ である。

以下 $a > 0$ とする。 $Q(u)$ の頂点の u 座標は $u = \frac{a-b}{2a}$ である。まず $b \geq a$ のとき、頂点は $u \leq 0$ 側にあるので、 $u > 0$ での最小は $u \rightarrow 0+$ の近くで決まる。したがって必要十分条件は $1 - b \geq 0$ であり、 $0 < a \leq b \leq 1$ を得る。

次に $b < a$ のとき、頂点は $u > 0$ にあるので、頂点での値が非負であることが必要十分である。すなわち $1 - b - \frac{(b-a)^2}{2a} \geq 0$ である。 $a > 0$ だから整理して $2a(1-b) - (b-a)^2 \geq 0$ $2a - a^2 - b^2 \geq 0$ すなわち $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ である。

以上より、求める条件は $0 < a \leq b \leq 1$ または $a > 0$ 、 $b < a$ 、 $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ に、 $a = 0, 0 \leq b \leq 1$ を合わせたものである。まとめて書けば、 ab 平面で、線分 $a = 0, 0 \leq b \leq 1$ 、三角形部分 $0 < a \leq b \leq 1$ 、および円 $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ のうち $a > 0, b < a$ の部分を合わせた範囲である。



▶ 解法 2

【方針】

導関数を平方完成し、全実数上または半直線上での最小値を直接読む。(3) では $u = x + 1$ として、頂点が $u > 0$ にあるかどうかを $b < a$ と $b \geq a$ で分ける。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 1.$$

$a < 0$ なら両端で負になり、 $a = 0$ なら全実数で非負となるのは $b = 0$ のときだけである。 $a > 0$ では

$$f'(x) = 2a \left(x + \frac{a+b}{2a} \right)^2 - \frac{2a - a^2 - b^2}{2a}.$$

よって必要十分条件は $2a - a^2 - b^2 \geq 0$ である。 $a = 0, b = 0$ も含めると

$$(a-1)^2 + b^2 \leq 1$$

となる。

(2) $a = 0$ では、 $u = x + 1 > 0$ とおくと

$$f'(x) = 2bu + 1 - b.$$

$b < 0$ なら $u \rightarrow \infty$ で負になる。 $b \geq 0$ では下端 $u \rightarrow 0+$ での極限 $1 - b$ が非負であることが必要十分だから、

$$0 \leq b \leq 1$$

である。

(3)

$$f'(x) = Q(u) = 2au^2 + 2(b-a)u + 1 - b, \quad u = x + 1 > 0.$$

$a < 0$ は不可、 $a = 0$ は (2) の線分である。 $a > 0$ とする。 $b \geq a$ なら頂点は $u \leq 0$ にあるので、 $u > 0$ での下限は $Q(0) = 1 - b$ である。したがって

$$0 < a \leq b \leq 1.$$

$b < a$ なら頂点 $u = (a-b)/(2a) > 0$ で

$$\min Q = 1 - b - \frac{(a-b)^2}{2a} = \frac{2a - a^2 - b^2}{2a}.$$

よって

$$a > 0, \quad b < a, \quad (a-1)^2 + b^2 \leq 1.$$

以上に $a = 0, 0 \leq b \leq 1$ を加えた範囲が答えである。

【総評】 導関数の非負条件を、全実数上の 2 次式と半直線上の 2 次式として処理する問題。難度はやや高め、計算量も多めで、目安時間は 25~30 分。(1) では $a = 0$ の退化を落とさず、円盤 $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ に自然に含まれることまで確認したい。(3) は $u = x + 1 > 0$ と置くのが核心で、頂点が半直線の外にある場合と内にある場合で条件が変わる。境界 $u = 0$ は区間に含まれないが、全ての $u > 0$ で非負にするには極限值 $1 - b$ が非負である必要がある、という点がよくある落とし穴である。

【第 2 問】

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする.

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ.
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ.
- (3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ.
- (4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

点対称と線対称は、まず座標公式を作ってからグラフに適用する。(2) では 3 次関数を変曲点の x 座標 $-a/3$ のまわりに平行移動し、差 $F(p+u) - F(p)$ が u の奇関数になることを示す。(4) では、仮に縦直線 $x = p$ に関して線対称なら $F(p+u) = F(p-u)$ がすべての u で成り立つはずなので、3 次の項が消えないことから矛盾を出す。

【解答】

(1)

点 (X, Y) とその対称点を (X', Y') とする。点 (p, q) がこの 2 点の中点になるので $\frac{X+X'}{2} = p, \quad \frac{Y+Y'}{2} = q$ である。したがって $(X', Y') = (2p - X, 2q - Y)$ である。

(2) $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく。3 次関数の 2 次の項を消すために $p = -\frac{a}{3}$ とおく。 $x = p + u$ として $F(p+u) - F(p)$ を計算すると $F(p+u) - F(p) = u^3 + (3p+a)u^2 + (3p^2+2ap+b)u$ である。 $p = -a/3$ だから 2 次の項は消え、 $F(p+u) - F(p) = u^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)u$ となる。右辺は u の奇関数である。

したがって、グラフ上の点 $(p+u, F(p+u))$ に対して、点 $(p-u, F(p-u))$ は $F(p-u) - F(p) = -(F(p+u) - F(p))$ を満たす。これは 2 点が $\left(-\frac{a}{3}, F\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ に関して対称であることを意味する。よって G はこの点に関して点対称である。

(3)

直線 $x = p$ に関する対称では、 y 座標は変わらず、 x 座標だけが p をはさんで反対側へ移る。したがって点 (X, Y) の対称点は $(2p - X, Y)$ である。

(4)

もし G が直線 $x = p$ に関して線対称であるなら、任意の実数 u について、点 $(p+u, F(p+u))$ の対称点 $(p-u, F(p+u))$ も G 上にある。したがって $F(p-u) = F(p+u)$ がすべての u で成り立つはずである。

ところが $F(p+u) - F(p-u)$ を計算すると、最高次の項として $2u^3$ が現れる。これは恒等的に 0 にはならない。したがって $F(p+u) = F(p-u)$ はすべての u では成り立たない。

よって G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でない。

▶ 解法 2

【方針】

$x = u - a/3$ の平行移動で 3 次関数を「定数+奇関数」の形にする。対称変換を新しい座標で書けば、点対称性と縦軸に関する線対称性の不可能性を係数比較だけで判定できる。

【解答】

(1) 点 (p, q) が (X, Y) と対称点 (X', Y') の中点だから

$$(X', Y') = (2p - X, 2q - Y).$$

(2) $h = -a/3$ 、 $x = h + u$ とおく。展開すると

$$F(h + u) = F(h) + u^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)u.$$

右辺の定数項以外は u の奇関数なので

$$F(h + u) + F(h - u) = 2F(h).$$

よって G は点 $(h, F(h))$ に関して点対称である。

(3) 直線 $x = p$ は対称な 2 点の x 座標の中点であり、 y 座標は変えない。したがって対称点は

$$(2p - X, Y)$$

である。

(4) 仮に $x = p$ に関して線対称なら、 $H(u) = F(p + u)$ は $H(u) = H(-u)$ を満たす偶関数である。しかし平行移動しても $H(u)$ の最高次項は u^3 であり、 $H(-u)$ の最高次項は $-u^3$ である。係数 1 と -1 は一致しない。よってどの p に対しても線対称にはならない。

【総評】 座標上の対称公式と 3 次関数の変曲点対称を組み合わせる標準問題。難度は標準、計算量は中程度で、目安時間は 16~20 分。(2) では $p = -a/3$ と置いて 2 次の項を消すのが本質で、変曲点という言葉だけで済ませず、 $F(p + u) - F(p)$ が奇関数になる計算を残すとよい。(4) は線対称なら $F(p + u) = F(p - u)$ が必要、という必要条件に直すと短い。3 次の最高次項 u^3 が消えないことが、どの縦直線でも線対称にならない理由である。

【第 3 問 (a)】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。 $a_1, \dots, a_n$ の積を P_n とおく。

- (1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。
- (2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。
- (3) $S_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$ とおく。 S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。
- (4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

漸化式を $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$ と見ると、積 P_n との関係が出やすい。まず正值性を平方完成で示し、次に $a_{n+1} = P_n + 1$ を帰納法で証明する。逆数和は $a_k - 1 = P_{k-1}$ から $1/a_k = 1/P_{k-1} - 1/P_k$ と分解できるので、和が望遠鏡のように消える。

【解答】

(1) $a_1 = 2 > 0$ である。また任意の実数 x について $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ である。したがって $a_n > 0$ なら $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 > 0$ である。数学的帰納法により、すべての n について $a_n > 0$ である。

(2) $P_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とする。まず $a_2 = a_1^2 - a_1 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3 = P_1 + 1$ である。

ある n で $a_n = P_{n-1} + 1$ が成り立つと仮定する。このとき $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 = a_n(a_n - 1) + 1$ であり、仮定より $a_n - 1 = P_{n-1}$ だから $a_{n+1} = a_n P_{n-1} + 1 = P_n + 1$ である。よって数学的帰納法により、各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ が成り立つ。

(3)

順に計算すると $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 43$ である。したがって $S_1 = \frac{1}{2}$ であり、 $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ である。また $S_3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$ であり、 $S_4 = \frac{41}{42} + \frac{1}{43} = \frac{1805}{1806}$ である。

(4)

便宜上 $P_0 = 1$ とおく。(2) より $k \geq 1$ について $a_k = P_{k-1} + 1$ であるから $a_k - 1 = P_{k-1}$ である。すると

$$\frac{1}{P_{k-1}} - \frac{1}{P_k} = \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}P_k} = \frac{P_{k-1}(a_k - 1)}{P_{k-1}P_k} = \frac{1}{a_k}$$

となる。

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{P_{k-1}} - \frac{1}{P_k} \right)$$

であり、途中の項が打ち消し合って $S_n = 1 - \frac{1}{P_n}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

差 $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$ を連鎖させる。この式から積の公式を直接作り、逆数は $1/(a_k - 1) - 1/(a_{k+1} - 1)$ に分解して望遠和にする。

【解答】

(1)

$$a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であるから、帰納法により全ての a_n は正である。

(2) 漸化式から

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$$

を得る。 $a_1 - 1 = 1$ なので、この関係を順次用いると

$$a_{n+1} - 1 = a_n a_{n-1} \cdots a_1 = P_n.$$

よって $a_{n+1} = P_n + 1$ である。

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4 = 2, 3, 7, 43$ だから

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{5}{6}, \quad S_3 = \frac{41}{42}, \quad S_4 = \frac{1805}{1806}.$$

(4) 上の差の関係から

$$\frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1} = \frac{a_k}{a_k(a_k - 1)} - \frac{1}{a_k(a_k - 1)} = \frac{1}{a_k}.$$

したがって

$$S_n = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{P_n}.$$

【総評】 漸化式、積、逆数和がきれいにつながる数列問題。難度は標準、計算量は少なめで、目安時間は 15～18 分。 $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$ と変形して、 $a_n - 1$ が直前までの積 P_{n-1} になることを見抜けるかが中心である。(4) では $P_0 = 1$ を導入すると $1/a_k = 1/P_{k-1} - 1/P_k$ が自然に書ける。分母が大きい計算に見えても、実際は望遠鏡型の和なので、構造を掴めば短く処理できる。

【第 3 問 (b)】

- (1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか.
- (2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ.
- (3) n を自然数とする. もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば, $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ. ただし, 有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである.
- (4) n が自然数のとき, $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

互いに素の定義を公約数で明確にし、平方しても共通する素因数が現れないことを示す。 $\sqrt{n}$ が有理数なら既約分数 p/q として、 $p^2 = nq^2$ から $q = 1$ を導く。最後は、3 つの連続する自然数の中に平方数が 2 つ以上あると、正の平方数どうしの差が 1 または 2 になるはずだが、連続する平方数の差は少なくとも 3 であることから矛盾させる。

【解答】

(1)

自然数 a, b が互いに素であるとは、 a と b の正の公約数が 1 だけであることを、すなわち最大公約数が 1 であることをいう。

(2) a, b が互いに素であるとする。もし a^2 と b^2 が 1 より大きい公約数をもつなら、ある素数 p が a^2 と b^2 の両方を割り切る。素数 p が a^2 を割り切るなら p は a を割り切り、同様に p は b も割り切る。これは a, b が互いに素であることに反する。

したがって a^2 と b^2 は互いに素である。

(3) $\sqrt{n}$ が有理数であるとする。このとき互いに素な自然数 p, q を用いて $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ と表せる。両辺を 2 乗すると $p^2 = nq^2$ である。したがって q^2 は p^2 を割り切る。

しかし p, q は互いに素なので、(2) より p^2, q^2 も互いに素である。よって q^2 が p^2 を割り切るには $q^2 = 1$ 、すなわち $q = 1$ でなければならない。したがって $\sqrt{n} = p$ であり、 $\sqrt{n}$ は自然数である。

(4)

(3) より、 $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ が有理数であることは、それぞれ $n, n+1, n+2$ が平方数であることと同値である。

ところが、正の平方数を小さい順に並べると、隣り合う平方数の差は $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ であり、 $k \geq 1$ では $2k+1 \geq 3$ である。したがって、差が 1 または 2 である 2 つの自然数がともに平方数になることはない。

よって連続する 3 つの自然数 $n, n+1, n+2$ の中に平方数は高々 1 つしかない。したがって $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数である。

▶ 解法 2

【方針】

素因数分解に現れる各素数の指数で考える。既約分数の分母に素因数があれば 2 乗後にも残ることを使い、最後は平方数の差を因数分解して連続 3 整数を調べる。

【解答】

(1) a, b の最大公約数が 1、すなわち共通する素因数をもたないことをいう。

(2) 素因数分解で a^2, b^2 に現れる素数は、それぞれ a, b に現れる素数と同じで、指数だけが 2 倍になる。 a, b に共通する素因数がない以上、 a^2, b^2 にもない。よって両者は互いに素である。

(3) $\sqrt{n} = p/q$ を互いに素な自然数 p, q で表すと

$$p^2 = nq^2.$$

もし $q > 1$ なら q の素因数 ℓ は右辺を割るので p^2 を割り、したがって p も割る。これは p, q が互いに素であることに反する。よって $q = 1$ で、 $\sqrt{n} = p$ は自然数である。

(4) 有理な平方根が 2 つあるとすれば、(3) により $n, n+1, n+2$ のうち 2 つが平方数である。それらを $u^2 < v^2$ とすると

$$1 \leq v^2 - u^2 = (v-u)(v+u) \leq 2.$$

自然数 $u < v$ では $v-u \geq 1, v+u \geq 3$ なので積は 3 以上となり矛盾する。したがって有理なものは高々 1 つであり、少

なくとも 2 つは無理数である。

【総評】 互いに素、既約分数、平方数の間隔を確認する整数論の基本問題。難度はやや易しめ、計算量は少なく、目安時間は 12~15 分。(2) では「共通の素因数がない」という言い換えを使うと平方への移行が自然になる。(3) は $\sqrt{n} = p/q$ を必ず既約分数で置くことが重要で、既約でないまま進めると $q = 1$ が結論できない。(4) は (3) の結果を使って、有理性の問題を平方数の配置の問題に戻すのが狙いである。

【第 3 問 (c)】

r を 1 より小さい正の定数とする。平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$, 1 , $1+r$ となるものをそれぞれ B , C , D とする。 BD を直径とする円を描き、 A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする。 m 上の点で A からの距離が $1-r$, 1 , $1+r$ となるものをそれぞれ E , F , G とする。 E , F を通り l に接する円を描きその接点を P とする。また F , G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする。

- (1) A と P との間の距離 AP を r で表せ。
- (2) CF を r で表せ。
- (3) $PQ = CF$ を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

半直線 l を x 軸に取り、 A を原点に置く。 BD を直径とする円は中心 $(1, 0)$ 、半径 r なので、接線 m と l のなす角 ϕ は $\sin \phi = r$ を満たす。 E, F を通る円が l に接する点 P については、点 A からの接線と割線の関係 $AP^2 = AE \cdot AF$ を使う。同様に $AQ^2 = AF \cdot AG$ を求め、最後に CF を座標から計算して PQ と比較する。

【解答】

A を原点、半直線 l を x 軸の正の向きにとる。このとき $B = (1-r, 0)$, $C = (1, 0)$, $D = (1+r, 0)$ である。 BD を直径とする円の中心は $(1, 0)$ 、半径は r である。

半直線 m と l のなす角を ϕ とする。 m はこの円に接するので、中心 $(1, 0)$ から直線 m までの距離が r である。したがって $\sin \phi = r$, $\cos \phi = \sqrt{1-r^2}$ である。 m 上で A から距離 s の点は $(s \cos \phi, s \sin \phi)$ と表される。

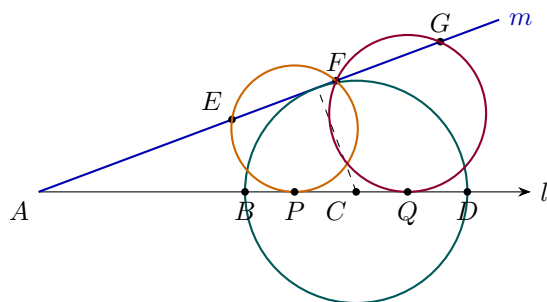
(1) E, F を通り l に接する円を考える。点 A からこの円へ引いた接線は AP 、割線は AEF であるから、接線と割線の関係より $AP^2 = AE \cdot AF$ である。ここで $AE = 1-r$, $AF = 1$ なので $AP^2 = 1-r$ である。 $AP > 0$ より $AP = \sqrt{1-r}$ である。

(2) $C = (1, 0)$, $F = (\cos \phi, \sin \phi)$ である。したがって $CF^2 = (1 - \cos \phi)^2 + (0 - \sin \phi)^2 = 1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 2 - 2 \cos \phi$ である。 $\cos \phi = \sqrt{1-r^2}$ より $CF^2 = 2 - 2\sqrt{1-r^2}$ であり、 $CF > 0$ だから $CF = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-r^2}}$ である。

(3)

同様に、 F, G を通り l に接する円について、点 A からの接線と割線を用いると $AQ^2 = AF \cdot AG = 1 \cdot (1+r) = 1+r$ である。よって $AQ = \sqrt{1+r}$ である。(1) より $AP = \sqrt{1-r}$ で、 Q は P より A から遠い側にあるから $PQ = AQ - AP = \sqrt{1+r} - \sqrt{1-r}$ である。

これを 2 乗すると $PQ^2 = (\sqrt{1+r} - \sqrt{1-r})^2 = 2 - 2\sqrt{(1+r)(1-r)} = 2 - 2\sqrt{1-r^2}$ である。(2) で求めた CF^2 と一致する。 $PQ > 0$, $CF > 0$ なので $PQ = CF$ である。



▶ 解法 2

【方針】

全てを座標で処理する。接線 m の角を定め、 l に接する円の中心を (p, ρ) と置く。円が m 上の 2 点を通る 2 本の式を引き、接点座標 p を直接求める。

【解答】

$A = (0, 0)$ 、 l を x 軸とし、 m の方向を (c, s) とする。中心 $(1, 0)$ 、半径 r の円に m が接するので

$$s = r, \quad c = \sqrt{1 - r^2}.$$

m 上で A から距離 u の点は (uc, us) である。

(1) E, F を通り l に接する円の中心を (p, ρ) とする。 E, F に対応する $u = 1 - r, 1$ を

$$(uc - p)^2 + (us - \rho)^2 = \rho^2$$

に代入する。2 式を引くと

$$(2 - r) - 2pc - 2\rho s = 0.$$

これを $u = 1$ の式と合わせて整理すると $p^2 = 1 - r$ を得る。接点は正の半直線上にあるから

$$AP = p = \sqrt{1 - r}.$$

(2) $C = (1, 0)$ 、 $F = (c, s)$ より

$$CF^2 = (1 - c)^2 + s^2 = 2 - 2c = 2 - 2\sqrt{1 - r^2}.$$

したがって

$$CF = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - r^2}}.$$

(3) 同じ計算を F, G 、すなわち $u = 1, 1 + r$ に行うと、接点 Q の座標は $q^2 = 1 + r$ を満たす。よって

$$PQ = \sqrt{1 + r} - \sqrt{1 - r}.$$

両辺を 2 乗すれば

$$PQ^2 = 2 - 2\sqrt{1 - r^2} = CF^2.$$

いずれも正の長さだから $PQ = CF$ である。

【総評】 接線、割線、座標計算を組み合わせる図形問題。難度は標準上位、計算量是中程度で、目安時間は 20～24 分。 BD を直径とする円の中心が $(1, 0)$ 、半径が r であることから $\sin \phi = r$ を出すのが最初の要点である。 $AP^2 = AE \cdot AF$ 、 $AQ^2 = AF \cdot AG$ を使うと接点の位置が一気に決まるが、どの円に対する接線・割線なのかを明記しないと論理が薄くなる。最後は 2 乗して比較し、長さが正であることから $PQ = CF$ と戻すとよい。

【第 4 問 (a)】

複素数平面上の点 z を考える.

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき, どのような図形を描くか. ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す.

- (2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $a \neq 0$ を用いて平方完成し、複素数の絶対値の形 $|az + b|^2$ に直す。(2) では左辺が右辺の共役になっていることを見抜き、 $dz(\bar{z} + 1)$ が実数である条件に変える。 $d = u + vi$ 、 $z = x + yi$ とおけば虚部が $uy + v(x^2 + y^2 + x)$ となるため、 $v = 0$ なら直線、 $v \neq 0$ なら原点と $(-1, 0)$ を通る円になる。

【解答】

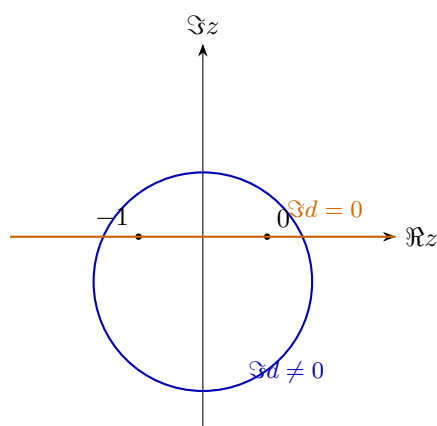
(1) $a \neq 0$ とする。与式 $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ の両辺に a を掛けると $a^2z\bar{z} + a\bar{b}z + ab\bar{z} + ac = 0$ である。左辺のはじめの 3 項は $(az + b)(a\bar{z} + \bar{b}) - |b|^2$ に等しいので $|az + b|^2 = |b|^2 - ac$ を得る。

仮定より右辺は正である。さらに $|az + b| = |a| \left| z + \frac{b}{a} \right|$ だから、点 z は $\left| z + \frac{b}{a} \right| = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$ を満たす。したがって図形は中心 $-\frac{b}{a}$ 、半径 $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$ の円である。

(2) $z(\bar{z} + 1)$ の共役は $\bar{z}(z + 1)$ である。したがって与式 $dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1)$ は、 $dz(\bar{z} + 1)$ がその共役に等しい、すなわち実数であることと同値である。 $d = u + vi$ 、 $z = x + yi$ とおく。すると $z(\bar{z} + 1) = x^2 + y^2 + x + yi$ であるから、 $dz(\bar{z} + 1)$ の虚部は $uy + v(x^2 + y^2 + x)$ である。よって条件は $uy + v(x^2 + y^2 + x) = 0$ である。

もし $v = 0$ なら、 $d \neq 0$ より $u \neq 0$ なので $y = 0$ となる。したがって図形は実軸である。

もし $v \neq 0$ なら $x^2 + y^2 + x + \frac{u}{v}y = 0$ である。これは円の方程式であり、 $(0, 0)$ と $(-1, 0)$ を通る。したがって図形は原点と -1 を通る円である。



▶ 解法 2

【方針】

$z = x + yi$, $b = u + vi$, $d = \lambda + \mu i$ と置き、実部・虚部へ完全に展開する。複素数の幾何を使わず、2 次方程式の平方完成だけで直線または円を得る。

【解答】

(1) $z = x + yi$, $b = u + vi$ とおくと

$$a(x^2 + y^2) + 2ux + 2vy + c = 0.$$

$a \neq 0$ なので平方完成して

$$\left(x + \frac{u}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2 - ac}{a^2}.$$

右辺は正である。よって中心 $-b/a$ 、半径

$$\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$$

の円である。

(2) $d = \lambda + \mu i$, $z = x + yi$ とする。与式は $dz(\bar{z} + 1)$ の虚部が 0 であることと同値である。

$$z(\bar{z} + 1) = x^2 + y^2 + x + yi$$

だから

$$\lambda y + \mu(x^2 + y^2 + x) = 0.$$

$\mu = 0$ なら $d \neq 0$ より $\lambda \neq 0$ であり、軌跡は $y = 0$ 、すなわち実軸である。 $\mu \neq 0$ なら

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{4\mu^2}.$$

したがって原点と $(-1, 0)$ を通る円である。

【総評】 複素数の方程式を円や直線の方程式へ翻訳する問題。難度は標準上位、計算量は中程度で、目安時間は 18~22 分。

(1) は $|az + b|^2$ への平方完成を正確に行い、半径が正になる理由として $|b|^2 - ac > 0$ を使う。(2) は式全体が「ある複素数が実数である」条件を表しているから見抜くのが核心である。 d の虚部が 0 かどうかで直線と円に分かれるため、 $d \neq 0$ の条件も含めて場合分けを明確にしたい。

【第 4 問 (b)】

サイコロを n 回振って、出た目を小さい方から順に並べ、第 i 番目を X_i ($i = 1, \dots, n$) とする。

- (1) $n = 7$ のとき、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。
- (2) 一般の n に対して、 $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。
- (3) 一般の n に対して、 X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。
- (4) 一般の n に対して、期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

並べ替えた X_1 は最小値、 X_n は最大値である。(1) は既に出た 3 と 5 の個数を固定し、残り 2 個の入りで 4 番目がどう変わるかを調べる。(2)(3) は最小値について、 $P(X_1 \geq k)$ を使うと簡潔になる。(4) はサイコロの目を $j \mapsto 7 - j$ と対応させる対称性により、最大値の期待値を最小値の期待値から求める。

【解答】

(1)

7 回のうち、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出ている。残り 2 回の目は 3 でも 5 でもない。

残り 2 回の目がどちらも 3 より小さい場合、並べると 4 番目は 3 になる。残り 2 回の目の一方または両方が 4 で、5 より小さい位置に入る場合、4 番目は 3 または 4 になり得る。残り 2 回の目がどちらも 5 より大きい場合には、並びは 3, 3, 3, 5, 5, ... の形になるので 4 番目は 5 になる。

したがって X_4 のとりうる値は 3, 4, 5 である。

(2) X_1 は出た目の最小値である。 $X_1 = 2$ となるのは、すべての目が 2 以上であり、かつすべての目が 3 以上ではないときである。よって $P(X_1 = 2) = P(X_1 \geq 2) - P(X_1 \geq 3)$ である。各回は独立なので

$$P(X_1 \geq 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad P(X_1 \geq 3) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

である。したがって $P(X_1 = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n$ である。

(3)

正の整数値をとる確率変数について

$$E(X_1) = \sum_{k=1}^6 P(X_1 \geq k)$$

が成り立つ。ここで $X_1 \geq k$ は、すべての目が k 以上であることを意味するから $P(X_1 \geq k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^n$ である。したがって

$$E(X_1) = \sum_{k=1}^6 \left(\frac{7-k}{6}\right)^n = \sum_{j=1}^6 \left(\frac{j}{6}\right)^n$$

である。

(4)

出た目をすべて $j \mapsto 7-j$ に置き換えると、サイコロの各目の出やすさは変わらない。この対応では、最小値 X_1 は $7-X_n$ に対応する。したがって期待値も等しく $E(X_1) = E(7-X_n) = 7-E(X_n)$ である。よって $E(X_1+X_n) = E(X_1)+E(X_n) = 7$ である。

▶ 解法 2

【方針】

最小値の分布 $P(X_1 = j)$ を直接求め、期待値の和を差の形で整理する。最大値も同様に分布から求め、2 つの期待値を足して 7 になることを計算で確認する。

【解答】

(1) 残り 2 個を例えば (1, 2)、(4, 4)、(6, 6) とすれば、それぞれ $X_4 = 3, 4, 5$ となる。3 個の 3 と 2 個の 5 が既にあるので、これ以外の値は 4 番目にはならない。よって 3, 4, 5 である。

(2) 全て 2 以上の場合から全て 3 以上の場合を除いて

$$P(X_1 = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n.$$

(3) 一般に

$$P(X_1 = j) = \left(\frac{7-j}{6}\right)^n - \left(\frac{6-j}{6}\right)^n \quad (1 \leq j \leq 6).$$

よって差の和を整理すると

$$E(X_1) = \sum_{j=1}^6 jP(X_1 = j) = \sum_{k=1}^6 \left(\frac{k}{6}\right)^n.$$

(4) 同様に

$$P(X_n = j) = \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n.$$

したがって

$$E(X_n) = 6 - \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{6}\right)^n.$$

一方

$$E(X_1) = 1 + \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{6}\right)^n.$$

両者を足して $E(X_1 + X_n) = 7$ である。

【総評】 順序統計量のうち最小値と最大値を扱う確率問題。難度は標準、計算量は中程度で、目安時間は 16~20 分。 X_1 が最小値であることを意識し、 $P(X_1 = k)$ を直接数えるより $P(X_1 \geq k)$ の差で求める方が安全である。(3) の期待値公式は、整数値変数を尾確率で足し上げる典型手法で、ここで使えると式が短くなる。(4) は目の反転 $j \mapsto 7 - j$ の対称性が最短で、分布を細かく計算しないのがよい。

【第 4 問 (c)】

m, n を自然数とする。次の算法を考える。

- (a) $i = m, j = n, k = 0$.
- (b) $i = 1$ ならば $Ans = k + j$ として終了する。
- (c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする。
- (d) $i = \lfloor i/2 \rfloor$.
- (e) $j = 2 * j$.
- (f) (b) に戻る。

(ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。)

- (1) $m = 100$ のとき、3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である。
- (2) 一般の m に対して、(b) における i, j, k の値について $i \cdot j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。
- (3) 一般の m に対して、 Ans を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

この算法は、 i を半分にしながら、奇数部分に対応する j を k に足していく掛け算の手順である。各周回の (b) に入った時点で $ij + k$ を見ると、 i が偶数でも奇数でも次の周回で値が変わらない。(1) は実際に周回を追い、(2) は偶奇で場合分けして不変量を証明し、(3) は終了時 $i = 1$ で $Ans = k + j = ij + k$ となることから答える。

【解答】

(1)

1 周目の (b) では、問題文の通り $(i, j, k) = (100, n, 0)$ である。100 は偶数なので k は変わらず、 i は 50、 j は $2n$ になる。したがって 2 周目の (b) では $(i, j, k) = (50, 2n, 0)$ である。

同様に 50 も偶数なので、3 周目の (b) では $(i, j, k) = (25, 4n, 0)$ である。ここで 25 は奇数なので、(c) で $k = 0 + 4n = 4n$ となる。その後 $i = \lfloor 25/2 \rfloor = 12, j = 8n$ となるから、4 周目の (b) では $(i, j, k) = (12, 8n, 4n)$ である。

(2)

ある周回の (b) における値を (i, j, k) とする。まず i が偶数のとき、(c) では k は変わらず、次の周回では $i' = \frac{i}{2}, j' = 2j, k' = k$ である。したがって $i'j' + k' = \frac{i}{2} \cdot 2j + k = ij + k$ である。

次に i が奇数のとき、 $i = 2h + 1$ とおく。(c) で k は $k + j$ となり、次の周回では $i' = h, j' = 2j, k' = k + j$ である。したがって $i'j' + k' = h \cdot 2j + k + j = (2h + 1)j + k = ij + k$ である。

よって、どちらの場合にも次の周回で $ij + k$ は変わらない。したがって $ij + k$ は 1 周目から最後まで一定である。1 周目では $ij + k = mn$ なので、一定値は mn である。

(3)

算法が終了するのは (b) で $i = 1$ となったときであり、そのとき $Ans = k + j$ と定められる。ところが $i = 1$ なので $k + j = ij + k$ である。(2) より $ij + k$ は常に mn に等しいから $Ans = mn$ である。

▶ 解法 2

【方針】

m の 2 進表示を使う。各周回で最下位桁を読み取り、その桁が 1 なら対応する $2^s n$ を加える算法だと説明する。実際の値と不変量も 2 進表示の分解から確認する。

【解答】

(1)

$$100 \longrightarrow 50 \longrightarrow 25 \longrightarrow 12$$

と半減する。 j は毎回 2 倍され、25 だけが奇数なので、3 周目と 4 周目は

$$(i, j, k) = (25, 4n, 0), \quad (12, 8n, 4n)$$

である。

(2) m の 2 進表示を

$$m = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \cdots + 2^s \varepsilon_s, \quad \varepsilon_\nu \in \{0, 1\}$$

とする。 r 周の処理後、 i は未処理の上位桁、 $j = 2^r n$ 、 k は処理済みの 1 の桁に対応する $\varepsilon_0 n + \cdots + \varepsilon_{r-1} 2^{r-1} n$ である。したがって常に

$$ij + k = mn.$$

これは偶数なら桁 0 を捨て、奇数ならその桁の j を先に加えることに対応する。

(3) 最後は最上位桁だけが残って $i = 1$ となる。そのとき

$$Ans = k + j = ij + k = mn.$$

【総評】 手順をそのまま追うだけでなく、不変量 $ij + k$ を見つけて証明する問題。難度はやや易しめ、計算量は少なく、目安時間は 12～16 分。(1) では (b) に戻ってきた時点の値を答えるので、奇数判定後の k の更新と、その後の i, j の更新順を混同しないことが大切である。(2) は偶数・奇数の 2 場合を丁寧に書けば十分で、(3) は終了時に $i = 1$ であることから $k + j = ij + k$ と結ぶ。アルゴリズムの意味は掛け算だが、答案では不変量で示すのが最も確実である。