

九州大学 2003 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数 $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $bf(a) < 0$ をみたす点 (a, b) の集合を座標平面上に図示せよ。
- (2) $y = f(x)$ の極値を与える x 座標を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ の漸近線を求め、グラフの概形をかけ。

▶ 解法 1

【方針】

有理関数なので、まず零点 $-1, 0, 1$ と定義できない点 $-2, 2$ で符号を分ける。(2) は商の微分で導関数を求め、分母は常に正なので分子の 4 次式を x^2 の 2 次方程式として解く。(3) は割り算または部分分数分解で斜め漸近線と縦漸近線を求め、符号と極値を合わせて概形を決める。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$ である。符号が変わる可能性がある点は $-2, -1, 0, 1, 2$ である。ただし $x = \pm 2$ では定義されない。

符号表を作ると、 $f(a) > 0$ となるのは $-2 < a < -1$, $0 < a < 1$, $2 < a$ であり、 $f(a) < 0$ となるのは $a < -2$, $-1 < a < 0$, $1 < a < 2$ である。

不等式 $bf(a) < 0$ は、 $f(a) > 0$ のとき $b < 0$ 、 $f(a) < 0$ のとき $b > 0$ を意味する。したがって図示すべき領域は

$$\begin{cases} b < 0 & (-2 < a < -1, 0 < a < 1, 2 < a), \\ b > 0 & (a < -2, -1 < a < 0, 1 < a < 2) \end{cases}$$

である。境界 $a = -1, 0, 1$ では $f(a) = 0$ なので含まれず、 $a = \pm 2$ も定義されないので含まれない。

(2) 商の微分により

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 1)(x^2 - 4) - (x^3 - x)2x}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{x^4 - 11x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

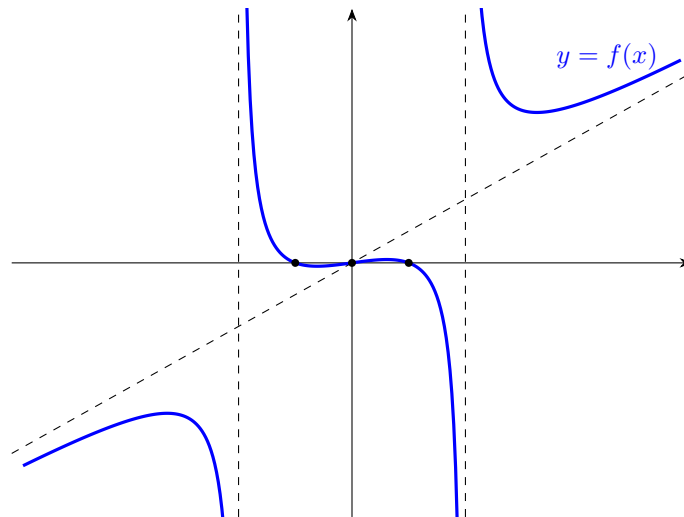
である。 $x \neq \pm 2$ では分母は正なので、極値を与える候補は $x^4 - 11x^2 + 4 = 0$ を満たす点である。 $u = x^2$ とおくと $u^2 - 11u + 4 = 0$ だから $u = \frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$ である。どちらも正なので、極値を与える x 座標は

$$x = \pm \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{2}}, \quad \pm \sqrt{\frac{11 + \sqrt{105}}{2}}$$

である。

(3) 割り算すると $f(x) = x + \frac{3x}{x^2 - 4}$ であり、さらに $\frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{3}{2(x-2)} + \frac{3}{2(x+2)}$ である。したがって漸近線は $x = -2$, $x = 2$, $y = x$ である。

概形は、 $x = \pm 2$ を縦の漸近線、 $y = x$ を斜めの漸近線として描く。(1) の符号から x 軸との交点は $x = -1, 0, 1$ であり、(2) の 4 つの点で増減が切り替わる。これらを合わせて、有理関数の各区間 $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$ に分けてグラフを描けばよい。



▶ 解法 2 (奇関数の対称性と部分分数)

【方針】

f が奇関数であることを使って右半分だけを調べる。部分分数表示で漸近線と発散方向を確認し、導関数の根を重ねる。

【解答】

$$f(x) = x + \frac{3}{2(x-2)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

であり、 $f(-x) = -f(x)$ である。

(1) $x > 0$ では零点 $0, 1$ と極 2 で符号を分けると

$$f(x) > 0 \quad (0 < x < 1, 2 < x), \quad f(x) < 0 \quad (1 < x < 2).$$

奇関数の対称性で負側も得られる。 $bf(a) < 0$ はこの符号と b が逆になる開領域であり、零点と $a = \pm 2$ は含まない。

(2)

$$f'(x) = \frac{x^4 - 11x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}.$$

$u = x^2$ とおけば

$$u = \frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$$

だから、極値を与える x は

$$x = \pm \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{2}}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{11 + \sqrt{105}}{2}}.$$

(3) 部分分数表示から

$$x = -2, \quad x = 2, \quad y = x$$

が漸近線である。さらに

x	-2^-	-2^+	2^-	2^+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

である。奇関数の原点对称性、3 個の零点、4 個の極値を合わせれば概形が一意に定まる。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 16～22 分。採点ポイントは、符号表で零点と定義できない点を分けること、導関数の分子 $x^4 - 11x^2 + 4$ を x^2 の方程式として処理すること、漸近線 $x = \pm 2$ と $y = x$ をそろえることです。

誤りやすいのは、(1) で $a = \pm 2$ や $a = -1, 0, 1$ を境界として含めてしまうことです。 $bf(a) < 0$ は厳密な不等式なので、 $f(a) = 0$ の点も含みません。グラフ概形では、符号、極値、漸近線の 3 情報を別々に求めてから重ねると崩れにくくなります。

【第 2 問】

次の問いに答えよ。

- (1) 次の性質をもつ 4 次関数 $f(x)$ を求めよ.
- (i) $y = f(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ に関して対称である.
 - (ii) 方程式 $f(x) = 0$ は -1 と 1 の間に相異なる 4 個の解をもつ.
 - (iii) $f(x)$ の極値はすべてその絶対値が 1 に等しい. さらに $f(1) = 1$ をみtas.
- (2) 次の性質をもつ 3 次関数 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を 1 つ求めよ.
- (i) $y = g(x)$ のグラフは x 軸と相異なる 3 個の共有点をもつ.
 - (ii) $p_0 = 0, p_4 = 1$ とおく. 共有点の x 座標 p_1, p_2, p_3 は $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ をみtas.
 - (iii) 面積

$$S_i = \int_{p_{i-1}}^{p_i} (-1)^i g(x) dx$$

($i = 1, 2, 3, 4$) の比が $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 2 : 2 : 1$ をみtas.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は偶関数になるように x^2 の 2 次式として作り、極値が $1, -1$ になる具体例を選ぶ。(2) は 3 つの根を $1/2$ を中心に対称に置き、左右の面積が対称になる形にする。中央の面積と端の面積の比が $2 : 1$ になるように根の間隔を決め、最後に条件を順に確認する。

【解答】

(1) 例えば $f(x) = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$ とする。これは x^2 だけで表されるので偶関数であり、グラフは直線 $x = 0$ に関して対称である。また $f(1) = 2(2 - 1)^2 - 1 = 1$ である。

極値を確認する。展開すると $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ であり、 $f'(x) = 32x^3 - 16x = 16x(2x^2 - 1)$ である。したがって極値をとる点は $x = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。値は $f(0) = 1, f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$ であり、極値はすべて絶対値が 1 である。

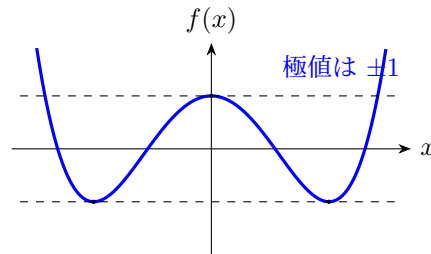
さらに $f(x) = 0$ は $2(2x^2 - 1)^2 = 1$ すなわち $2x^2 - 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。これから $-1 < x < 1$ に相異なる 4 個の解が得られる。よってこの $f(x)$ は条件を満たす。

(2) $d = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ とおき、

$$g(x) = \left(x - \frac{1-d}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1+d}{2}\right)$$

とする。このとき 3 つの零点は $p_1 = \frac{1-d}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{1+d}{2}$ である。 $0 < d < 1$ なので $0 < p_1 < p_2 < p_3 < 1$ が成り立つ。 $u = x - 1/2$ とおくと $g(x) = u \left(u^2 - \frac{d^2}{4}\right)$ であり、 $u = 0$ に関して奇関数の形である。したがって左右対称性から $S_1 = S_4, S_2 = S_3$ である。

端の面積と中央の面積を比べる。原始関数は $\frac{u^4}{4} - \frac{d^2 u^2}{8}$ である。計算すると $S_1 = \frac{(1-d^2)^2}{64}, S_2 = \frac{d^4}{64}$ である。ここで $d^2 = 2 - \sqrt{2}$ だから $d^4 = (2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$ であり、 $(1-d^2)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ である。よって $d^4 = 2(1-d^2)^2$ となり、 $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 2 : 2 : 1$ である。したがってこの $g(x)$ は条件を満たす。



▶ 解法 2 (対称形から係数を決定)

【方針】

(1) は一般の偶 4 次式から条件を順に使って係数を決める。(2) は根を $1/2$ 対称に置く一般形から面積比の方程式を解く。

【解答】

(1) 偶 4 次関数を

$$f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$$

とおく。4 個の零点を $(-1, 1)$ にもち、極値の絶対値が 1 で $f(1) = 1$ となる形では、中央の極大値を 1、左右の極小値を -1 と取る。したがって

$$C = 1, \quad A + B = 0.$$

$f'(x) = 2x(2Ax^2 + B)$ の非零の停留点では $x^2 = \frac{1}{2}$ であり、

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{A}{4} = -1.$$

よって $A = 8, B = -8$ で

$$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

(2)

$$u = x - \frac{1}{2}, \quad g(x) = u(u^2 - h^2)$$

とおく。零点は $-h, 0, h$ だけ平行移動したものである。 $0 < h < \frac{1}{2}$ なら 3 零点は $(0, 1)$ にある。対称性から $S_1 = S_4, S_2 = S_3$ である。

$$S_1 = \frac{(1 - 4h^2)^2}{64}, \quad S_2 = \frac{16h^4}{64}.$$

$S_2 = 2S_1$ を解くと

$$4h^2 = 2 - \sqrt{2}.$$

したがって $d = 2h = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ として

$$g(x) = \left(x - \frac{1-d}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1+d}{2}\right)$$

が条件を満たす。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 24～32 分。採点ポイントは、一般解を求めようとせず条件を満たす具体例を作ること、(1) では偶関数かつ極値が ± 1 になる形を選ぶこと、(2) では根を $1/2$ 対称に置いて面積比の計算を半分に減らすことです。

誤りやすいのは、条件を満たす「1 つ」を求めればよいのに、係数全体を分類しようとして計算を重くすることです。構成問題では、選んだ関数が条件 (i)(ii)(iii) をすべて満たすことを確認する必要があります。特に (2) は面積比の確認を省くと、具体例として成立していることが伝わりません。

【第 3 問】

座標平面上の原点にある点 P を次のルールで移動させるゲームを考える.

- (i) 赤, 白, 青, 黄色の玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている袋の中から玉を 1 個取り出して色を見た後で袋に戻す操作を繰り返す.
- (ii) 取り出した玉が赤色であれば点 P を現在の座標から x 軸の正の方向に 1 だけ移動させる. 玉が, 白, 青, 黄色であれば, 点 P をそれぞれ x 軸の負の方向, y 軸の正の方向および y 軸の負の方向に 1 だけ移動させる.
- (iii) 点 P を 1 回移動させるたびに点数 1 を得る. ただし, 点 P が点 $A(1, 1)$ に到着した場合は 2 点加算されて点数 3 を得る.
- (iv) 移動を 4 回繰り返すか, または点 P が点 A に到着したときに, ゲームは終了する.

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P が点 A に到達する確率を求めよ.
- (2) ゲーム終了時の合計点数の期待値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

点 $A(1, 1)$ に到達できるのは偶数回目だけで, このゲームでは 2 回目または 4 回目に限られる. 2 回目到達と 4 回目に初めて到達を分けて経路数を数える. 期待値は到達時刻ごとの得点を使って求めるか, 移動回数の期待値と到達ボーナスに分けて計算する.

【解答】

(1) 1 回の移動を $R = (1, 0)$, $L = (-1, 0)$, $U = (0, 1)$, $D = (0, -1)$ と書く. 点 $A(1, 1)$ に到達するには, 移動回数は偶数でなければならない. このゲームは最大 4 回で終わるので, 到達する可能性があるのは 2 回目または 4 回目である.

2 回目に到達するには, R と U が 1 回ずつ出ればよい. 順序は RU , UR の 2 通りである. したがって確率は $\frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$ である.

次に, 4 回目に初めて到達する場合を数える. 4 回後に $(1, 1)$ にいるには, RU に加えて打ち消し合う 1 組を入れる必要がある. 余分な組は R, L または U, D である.

余分な組が R, L のとき, 並べる記号は R, R, L, U であり, 全体は $\frac{4!}{2!} = 12$ 通りである. このうち最初の 2 回で R, U が出るものはすでに 2 回目で到達している. 最初の 2 回が RU または UR で, 残り 2 つを並べる場合がそれぞれ 2 通りあるので, 除くべきものは 4 通りである. よってこの型は 8 通りである.

余分な組が U, D のときも同様に 8 通りである. したがって 4 回目に初めて到達する経路は $8 + 8 = 16$ 通りで, 確率は $\frac{16}{4^4} = \frac{1}{16}$ である.

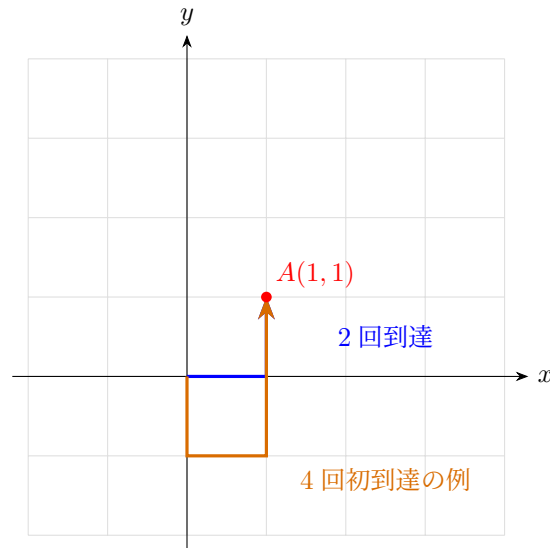
よって到達確率は $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ である.

(2) 2 回目に到達した場合, 1 回目は 1 点, 2 回目は到達により 3 点なので, 合計は $1 + 3 = 4$ である. 4 回目に初めて到達した場合, 最初の 3 回は各 1 点, 4 回目は 3 点なので, 合計は $1 + 1 + 1 + 3 = 6$ である. 到達しない場合は 4 回移動して各 1 点なので, 合計は 4 点である.

したがって期待値は

$$\begin{aligned} E &= 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{16} + 4 \left(1 - \frac{3}{16} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{13}{4} \\ &= \frac{33}{8}. \end{aligned}$$

別解. 得点を「移動による基本点」と「到達時の追加 2 点」に分けてもよい. 2 回目到達のときだけ本来 4 回の移動が 2 回で終わるので, 移動回数の期待値は $2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{15}{4}$ である. 到達した場合には追加点 2 点が入るので, 追加点の期待値は $2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$ である. よって $E = \frac{15}{4} + \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$ となる.



▶ 解法 2 (状態遷移とボーナス分解)

【方針】

到達時刻を 2 回目・4 回目に分け、格子上の状態遷移で初到達経路を数える。得点は移動の基本点と到達ボーナス 2 点に分ける。

【解答】

(1) $A = (1, 1)$ へは偶数回目にしか到達できない。

2 回目の到達経路は

$$RU, \quad UR$$

の 2 本なので

$$P(T = 2) = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}.$$

4 回後に A にいる経路は、 R, U に R, L または U, D の打消し組を加えたものだけである。各型は $4!/2! = 12$ 本、計 24 本である。このうち 2 回目に到達済みの経路は各型 4 本、計 8 本だから

$$P(T = 4) = \frac{24 - 8}{4^4} = \frac{1}{16}.$$

よって

$$P(\text{到達}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

(2) 基本点は移動 1 回につき 1 点である。2 回目到達の場合だけ移動回数が 2 となり、それ以外は 4 だから

$$E(\text{移動回数}) = 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{4}.$$

到達時の追加 2 点の期待値は

$$2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8}.$$

したがって合計点の期待値は

$$\frac{15}{4} + \frac{3}{8} = \frac{33}{8}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 12～16 分。採点ポイントは、到達が 2 回目と 4 回目に限られること、4 回目到達では 2 回目にすでに到達した経路を除くこと、得点が到達時刻によって変わることです。

誤りやすいのは、4 回後に $(1, 1)$ にいる経路をすべて数えてしまい、2 回目で終了している経路を混ぜることです。また、到達した移動では 1 点ではなく 3 点を得るため、期待値計算では停止時刻と得点を対応させる必要があります。経路数で解いても、基本点とボーナスに分けても同じ値になります。

【第 4 問】

関数 $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 1$ において連続で $0 \leq f(x) \leq 1$ をみたす. このとき次の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ は共有点を持つことを証明せよ.

(2) $f(x)$ が微分可能で $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ をみたすならば,

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ とし } x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

によって定義される数列 $\{x_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束することを証明せよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $g(x) = f(x) - x$ を作り、中間値の定理を使う。(2) はまず固定点が一意であることを平均値の定理で示し、その固定点 α からの距離を評価する。 $|f'(x)| \leq 1/2$ により距離が毎回高々半分になるので、数列は α に収束する。

【解答】

(1) $g(x) = f(x) - x$ とおく。 f は連続なので g も $[0, 1]$ で連続である。また $0 \leq f(0) \leq 1$ より $g(0) = f(0) \geq 0$ であり、 $0 \leq f(1) \leq 1$ より $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ である。

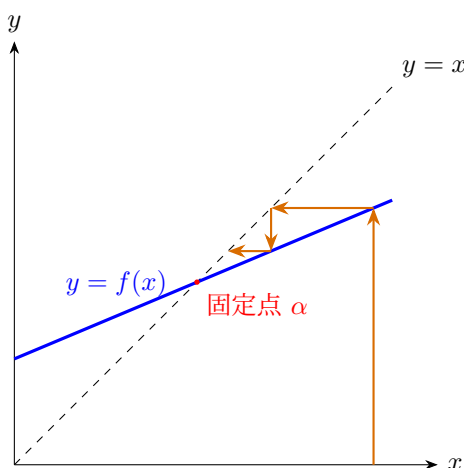
もし $g(0) = 0$ または $g(1) = 0$ なら、その点が共有点である。そうでなければ $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ なので、中間値の定理よりある $\alpha \in (0, 1)$ が存在して $g(\alpha) = 0$ となる。したがって $f(\alpha) = \alpha$ であり、 $y = f(x)$ と $y = x$ は共有点をもつ。

(2) (1) より固定点 α が存在する。まず固定点が一意であることを示す。もし α, β がともに固定点なら $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$ である。平均値の定理より、 $\alpha \neq \beta$ とすると $\frac{|f(\alpha) - f(\beta)|}{|\alpha - \beta|} \leq \frac{1}{2}$ である。したがって $|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$ となり、これは $\alpha \neq \beta$ に反する。よって固定点は一意である。

数列 $x_{n+1} = f(x_n)$ について、 $f(\alpha) = \alpha$ だから

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &= |f(x_n) - f(\alpha)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|. \end{aligned}$$

これを繰り返すと $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha|$. 右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づくので $x_n \rightarrow \alpha$ である。したがって数列 $\{x_n\}$ は収束する。



▶ 解法 2 (直接 Cauchy 列を示す)

【方針】

隣接項の差が毎回半分以下になることを示し、幾何級数で任意の 2 項間距離を評価して Cauchy 列にする。極限が固定点であることは最後に連続性から従う。

【解答】

(1)

$$g(x) = f(x) - x$$

とおけば $g(0) \geq 0$, $g(1) \leq 0$ である。 g は連続だから中間値の定理により

$$g(\alpha) = 0$$

となる $\alpha \in [0, 1]$ が存在する。

(2) 平均値の定理から任意の $x, y \in [0, 1]$ について

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

したがって

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|.$$

$m > n$ なら

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |x_{j+1} - x_j| \\ &\leq |x_2 - x_1| \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}. \end{aligned}$$

右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 となるので $\{x_n\}$ は Cauchy 列であり、実数の完備性から収束する。極限を L とすると $0 \leq L \leq 1$ で、 f の連続性より

$$L = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(L).$$

【総評】 難度 6、計算量 4。目安時間は 12~16 分。採点ポイントは、(1) で中間値の定理を使うために $f(x) - x$ を作ること、(2) で固定点の一意性と収束を同じ縮小評価から示すことです。

誤りやすいのは、共有点の存在だけを示して、その共有点に本当に近づく理由を書かないことです。 $|f'(x)| \leq 1/2$ は「距離を半分以下に縮める」ための条件なので、平均値の定理を使って $|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - \alpha|/2$ を明示するのが答案の中心です。