

入 学 試 験 問 題

数 学



九 州 大 学 2003 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 11 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面上で, $x = r(t) \cos t$, $y = r(t) \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする.

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき, x の最小値と y の最大値を求め, C の概形を図示せよ.

(2) 一般に, すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し,

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ. ここで, $r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である.

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を, x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt$$

と表せることを示せ.

第 2 問

座標平面上で、不等式 $2|x-4|+|y-5|\leq 3$, $2||x|-4|+||y|-5|\leq 3$ が表す領域を、それぞれ A , B とする.

- (1) 領域 A を図示せよ.
- (2) 領域 B を図示せよ.
- (3) 領域 B の点 (x, y) で, x が正の整数であり y が整数であって, $\log_x |y|$ が有理数となる点を, 理由を示してすべて求めよ.

第 3 問

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし、辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。 p, n を自然数とし、領域

$$D_n = \{(x, y) | 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$$

を考え、その面積を S_n とする。 L_n と M_n を、それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

- (1) グラフ $y = x^p$ ($0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$) と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。
(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また、面積 S_n を求めよ。
(3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$$

を求めよ。

第 4 (a) 問

空間内に四面体 $OABC$ があり $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ はすべて 90° であるとする. 辺 OA, OB, OC の長さを, それぞれ a, b, c とし, 三角形 ABC の重心を G とする.

- (1) $\angle OGA, \angle OGB, \angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ.
- (2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする. 点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き, 点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く. このとき, 線分 OQ の長さの最小値を求めよ.

第 4 (b) 問

$0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を l とする．ただし， i は虚数単位である．

- (1) 複素数 z が l 上を動くとき， z^2 が表す点の軌跡を図示せよ．
- (2) 直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする． m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ．

第 4 (c) 問

座標平面上に $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ を頂点とする正方形がある．ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて、 $y \leq x(a - x)$ の部分に落ちれば当たりとする．ただし、 $0 < a \leq 2$ とする．

- (1) ボールを 1 回落とす．当たる確率を求めよ．
- (2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$ ，2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす．1 回だけ当たる確率を求めよ．
- (3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす．少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ．

第 5 (a) 問

座標平面上に点 $P(a, b)$ があり， P は $|a| \leq \frac{1}{2}$, $|b| \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動く．また，点 $Q(x, y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている．ただし， $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$ である．

- (1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする． $P \neq O$ のとき， $\frac{RQ}{OP}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ．
- (2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ．

第 5 (b) 問

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である定数とする. 座標平面上で, $a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q, R とし, 接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく. 点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている. 点 P の全体が作る図形を G とする.

- (1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき, $\tan \theta$ を m_1 と m_2 で表せ.
- (2) G を数式で表せ.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ.

第 5 (c) 問

n を 2 以上の自然数とする. 数列 $\{S_n\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている.

- (1) 不等式 $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ が成り立つことを示せ.
- (2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して, $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ ($k = 1, 2, \dots$) とおく. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ. また,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left(S_n - \frac{1}{2} \right) p(n)$$

となる n の整式 $p(n)$ を求めよ.

- (3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)