

九州大学 2003 年度 理系

解答

全 9 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上で、 $x = r(t) \cos t$, $y = r(t) \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする.

- (1) $r(t) = e^{-t}$ のとき、 x の最小値と y の最大値を求め、 C の概形を図示せよ。
 (2) 一般に、すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し、

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ. ここで、 $r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である.

- (3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を、 x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt$$

と表せることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $r(t) = e^{-t}$ を代入して $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$ をそれぞれ微分し、端点も含めて最小・最大を確認する。(2) は $r(t)^3 \sin^2 t \cos t$ の導関数を積分し、端点で $\sin t = 0$ となることから恒等式を得る。(3) は回転体の体積を

$$\pi \int y^2 (-dx)$$

の形で表し、(2) の恒等式を代入して指定された式へ整理する。

【解答】

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$ である。

まず x を微分すると $\frac{dx}{dt} = e^{-t}(-\cos t - \sin t)$ である。したがって $dx/dt = 0$ となるのは $\cos t + \sin t = 0$ すなわち、 $0 \leq t \leq \pi$ では $t = \frac{3\pi}{4}$ である。端点も調べると

$$x(0) = 1, \quad x(\pi) = -e^{-\pi}, \quad x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

である。よって最小値は $-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}$ である。

次に y を微分すると $\frac{dy}{dt} = e^{-t}(\cos t - \sin t)$ である。 $dy/dt = 0$ となるのは $t = \frac{\pi}{4}$ であり、端点では $y(0) = y(\pi) = 0$ である。したがって最大値は $\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ である。

曲線 C は $(1, 0)$ から出発し、上半平面を通過して、原点へ近づきながら左側へ回り、最後に $(-e^{-\pi}, 0)$ に至る。左端は $t = 3\pi/4$ 、最も高い点は $t = \pi/4$ である。

(2) $F(t) = \{r(t)\}^3 \sin^2 t \cos t$ とおく。積の微分により

$$F'(t) = 3r(t)^2 r'(t) \sin^2 t \cos t + r(t)^3 \{2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t\}.$$

ここで $t = 0, \pi$ では $\sin t = 0$ なので $F(0) = F(\pi) = 0$ である。したがって $F'(t)$ を 0 から π まで積分すると

$$0 = 3 \int_0^\pi r^2 r' \sin^2 t \cos t dt + \int_0^\pi r^3 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) dt.$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^\pi r^2 r' \sin^2 t \cos t \, dt &= \frac{1}{3} \int_0^\pi r^3 (\sin^3 t - 2 \sin t \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^\pi r^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt\end{aligned}$$

である。これで示された。

(3) 媒介変数表示より $dx = (r'(t) \cos t - r(t) \sin t) dt$, $y = r(t) \sin t$ である。曲線と x 軸で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転すると、体積は

$$V = \pi \int_0^\pi r(t)^2 \sin^2 t \{r(t) \sin t - r'(t) \cos t\} dt$$

と表せる。これは πy^2 を、曲線が右から左へ進む向きに $-dx$ で積み上げる式である。

したがって

$$V = \pi \int_0^\pi r^3 \sin^3 t \, dt - \pi \int_0^\pi r^2 r' \sin^2 t \cos t \, dt.$$

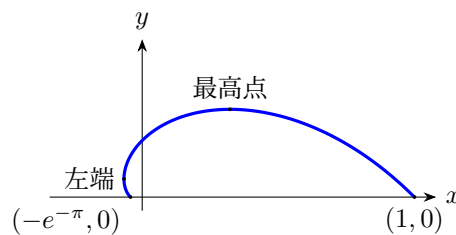
(2) を用いると

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^\pi r^3 \sin^3 t \, dt - \pi \int_0^\pi r^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi r^3 \sin t \, dt.\end{aligned}$$

ここで $r(t) = e^{-t}$ を代入すれば

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t \, dt$$

である。



▶ 解法 2 (極座標の微小体積)

【方針】

(1)(2) は微分と部分積分で処理する。(3) は極座標の微小面積を x 軸回転し、半径方向も積分して体積公式を直接導く。

【解答】

(1)

$$x'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t), \quad y'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

より、端点も比較して

$$\min x = -\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \quad \max y = \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}.$$

(2)

$$\int_0^\pi r^2 r' \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3} \int_0^\pi (r^3)' \sin^2 t \cos t \, dt$$

に部分積分を用いる。端点では $\sin t = 0$ だから境界項は 0 であり、

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{3} \int_0^\pi r^3 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) \, dt \\ &= \int_0^\pi r^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt.\end{aligned}$$

(3) 角 t の方向、原点からの距離 ρ にある微小面積は

$$dA = \rho d\rho dt.$$

これを x 軸のまわりに回すと、その重心が描く円周は $2\pi\rho\sin t$ だから微小体積は

$$dV = 2\pi\rho^2 \sin t d\rho dt.$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{r(t)} 2\pi\rho^2 \sin t d\rho dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi r(t)^3 \sin t dt. \end{aligned}$$

$r(t) = e^{-t}$ を代入すれば

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 24~32 分。採点ポイントは、(1) で端点も含めて極値を確認すること、(2) でどの関数を微分すればよいかを見抜くこと、(3) で体積式の $r \sin t - r' \cos t$ が $-dx/dt$ から来ることを説明することです。

誤りやすいのは、(2) の微分後に $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ を使う整理を落とすことです。また、(3) では単に公式を暗記しているように書くと符号が不明確になります。曲線が上半平面にあり、 x 軸との囲みを回転するため、 πy^2 を横方向に積み上げるという意味を添えると安全です。

【第 2 問】

座標平面上で、不等式 $2|x-4| + |y-5| \leq 3$, $2||x|-4| + ||y|-5| \leq 3$ が表す領域を、それぞれ A , B とする。

- (1) 領域 A を図示せよ。
- (2) 領域 B を図示せよ。
- (3) 領域 B の点 (x, y) で、 x が正の整数であり y が整数であって、 $\log_x |y|$ が有理数となる点を、理由を示してすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

領域 A は $(4, 5)$ を中心とするひし形として頂点を出す。領域 B は $|x|, |y|$ を使うので、領域 A を 4 象限に对称配置したものとして読む。(3) では x が正の整数なので $x = 3, 4, 5$ に限られることを先に示し、各 x で取り得る $|y|$ を列挙して、 $\log_x |y|$ が有理数になる条件を素因数で判定する。

【解答】

(1) 領域 A は $2|x-4| + |y-5| \leq 3$ で表される。中心は $(4, 5)$ であり、 $y = 5$ とおくと $2|x-4| \leq 3$ より $x = \frac{5}{2}, \frac{11}{2}$ が左右の頂点である。また $x = 4$ とおくと $|y-5| \leq 3$ より $y = 2, 8$ が上下の頂点である。したがって A は頂点

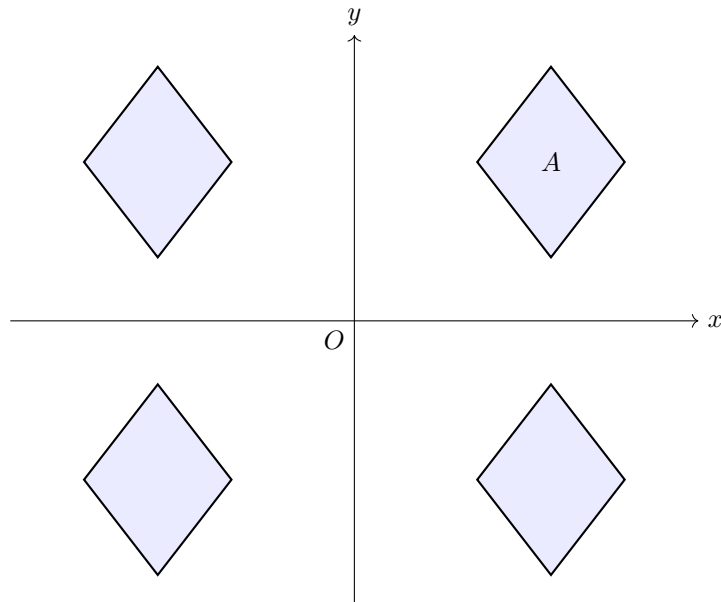
$$\left(\frac{5}{2}, 5\right), \left(\frac{11}{2}, 5\right), (4, 2), (4, 8)$$

をもつひし形である。

(2) 領域 B は $2||x|-4| + ||y|-5| \leq 3$ である。これは $(|x|, |y|)$ が第 1 象限にある領域 A に入ることを意味する。したがって、(1) のひし形を 4 つの点 $(4, 5)$, $(-4, 5)$, $(4, -5)$, $(-4, -5)$ を中心として対称に置いた図形が B である。

(3) x は正の整数であり、領域 B の条件から $2|x-4| \leq 3$ である。よって $x = 3, 4, 5$ だけを調べればよい。 $x = 3$ または $x = 5$ のときは $||y|-5| \leq 1$ なので $|y| = 4, 5, 6$ である。 $x = 3$ では $4, 5, 6$ のいずれも 3 の有理数乗で表される整数ではないので該当しない。 $x = 5$ では $|y| = 5$ のとき $\log_5 |y| = 1$ であり、有理数である。 $x = 4 = 2^2$ のときは $||y|-5| \leq 3$ なので $|y| = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ である。 $\log_4 |y|$ が有理数になるには、 $|y|$ が 2 だけを素因数にもつ数であればよい。この範囲では $|y| = 2, 4, 8$ である。

したがって求める点は $(4, \pm 2)$, $(4, \pm 4)$, $(4, \pm 8)$, $(5, \pm 5)$ である。



▶ 解法 2 (格子点表と素因数分解)

【方針】

$(|x|, |y|)$ を第 1 象限へ移して候補を表にする。対数が有理数なら $x^m = |y|^n$ となることを使い、素因数指数を比較する。

【解答】

(1) A は中心 $(4, 5)$ 、頂点

$$\left(\frac{5}{2}, 5\right), \left(\frac{11}{2}, 5\right), (4, 2), (4, 8)$$

のひし形である。

(2) B はこのひし形を x 軸、 y 軸、原点について対称移動して得る 4 個のひし形の和集合である。

(3) $x > 0$ なので $(x, |y|)$ だけを調べればよい。候補は

x	$ y $
3	4, 5, 6
4	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5	4, 5, 6

である。 $\log_x |y| = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$) なら

$$x^m = |y|^n.$$

素因数分解の一意性から、 $x = 3$ では $|y|$ は 3 の冪、 $x = 4 = 2^2$ では 2 の冪、 $x = 5$ では 5 の冪でなければならない。表の中で該当するのは

$$(x, |y|) = (4, 2), (4, 4), (4, 8), (5, 5)$$

だけである。したがって

$$(x, y) = (4, \pm 2), (4, \pm 4), (4, \pm 8), (5, \pm 5).$$

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 14～18 分。採点ポイントは、絶対値の中心を正しく読み取ってひし形を図示すること、 B を 4 象限への対称配置として理解すること、最後の格子点列挙で $x = 3, 4, 5$ だけに絞ることです。

誤りやすいのは、 $\log_x |y|$ が有理数である条件を小数近似で判断することです。整数 $|y|$ については、底 x と同じ素因数だけで作られるかを見ると安全です。また y は整数で正負どちらもあり得る一方、 $|y|$ が入っているので、最後に必ず $\pm$ の両方を戻す必要があります。

【第 3 問】

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし、辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。 p, n を自然数とし、領域

$$D_n = \{(x, y) | 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$$

を考え、その面積を S_n とする。 L_n と M_n を、それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

- (1) グラフ $y = x^p$ ($0 \leq x \leq n^{1/p}$) と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。
 (2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また、面積 S_n を求めよ。
 (3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

曲線 $y = x^p$ は単調に上がるので、各水平帯 $j < y < j+1$ を 1 回ずつ通る。このため境界曲線に交わる単位正方形の個数が n 個に抑えられ、面積 S_n と完全に含まれる単位正方形数 M_n の差を評価できる。最後は格子点数 L_n も面積との差が高々 n の定数倍であることを示し、主項 $n^{(p+1)/p}$ で割って極限を取る。

【解答】

(1) 曲線 $y = x^p$ は $x \geq 0$ で単調に増加する。 $0 \leq y \leq n$ を $j \leq y \leq j+1$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) という n 個の水平な帯に分けると、曲線は各帯をちょうど 1 回ずつ通る。

各帯の中で、曲線が通る単位正方形は 1 個だけである。したがって、グラフ $y = x^p$ と交わる単位正方形の個数は n である。

(2) D_n に完全に含まれる単位正方形の面積の合計は M_n である。一方、 D_n と単位正方形のずれは、境界の曲線 $y = x^p$ と交わる単位正方形の部分だけで起こる。(1) よりその個数は n 個であり、各単位正方形の面積は 1 である。したがって $M_n < S_n < M_n + n$ である。

また、 D_n の面積は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n^{1/p}} (n - x^p) dx \\ &= \left[nx - \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^{n^{1/p}} \\ &= n \cdot n^{1/p} - \frac{n^{(p+1)/p}}{p+1} \\ &= \frac{p}{p+1} n^{(p+1)/p}. \end{aligned}$$

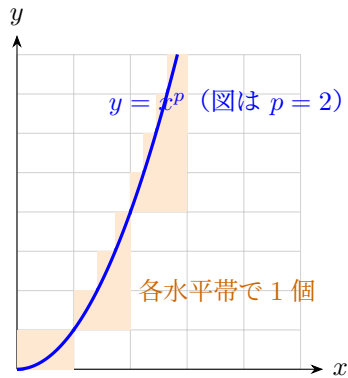
(3) 格子点数 L_n と面積 S_n の差も、境界付近の点の個数で評価できる。実際、各格子点を左下隅にもつ単位正方形と対応させると、完全に D_n に入る正方形から来る点を除いた残りは、曲線付近または座標軸・上辺付近に限られる。これらの個数は n の定数倍で抑えられるので $|L_n - S_n| \leq Cn$ となる定数 C が存在する。

したがって

$$\left| n^{-(p+1)/p} L_n - n^{-(p+1)/p} S_n \right| \leq C n^{-1/p}$$

であり、右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-(p+1)/p} L_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-(p+1)/p} S_n \\ &= \frac{p}{p+1}. \end{aligned}$$



▶ 解法 2 (床関数とリーマン和)

【方針】

水平線 $y = j$ ごとに格子点数を正確に数え、床関数を外した上下評価を作る。主項はリーマン和として求める。

【解答】

(1) $i < y < i + 1$ にある曲線部分では

$$i^{1/p} < x < (i + 1)^{1/p}.$$

この区間に整数 k があれば $i < k^p < i + 1$ となって不可能である。したがって曲線は各水平帯でただ 1 個の単位正方形の内部を通る。帯は $i = 0, \dots, n - 1$ の n 個なので、交わる単位正方形は n 個である。

(2) 各水平帯で、完全に含まれる正方形の面積と領域の面積との差は 0 より大きく 1 より小さい。全帯で足せば

$$M_n < S_n < M_n + n.$$

また

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^n y^{1/p} dy \\ &= \frac{p}{p+1} n^{(p+1)/p}. \end{aligned}$$

(3) 高さ $y = j$ 上の格子点は

$$(0, j), (1, j), \dots, (\lfloor j^{1/p} \rfloor, j)$$

なので

$$L_n = \sum_{j=0}^n (\lfloor j^{1/p} \rfloor + 1).$$

$$j^{1/p} - 1 < \lfloor j^{1/p} \rfloor \leq j^{1/p}$$

を使うと、定数項は尺度 $n^{1+1/p}$ で割った後に消える。一方

$$\begin{aligned} n^{-(p+1)/p} \sum_{j=0}^n j^{1/p} &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{n} \right)^{1/p} \\ &\longrightarrow \int_0^1 x^{1/p} dx = \frac{p}{p+1}. \end{aligned}$$

はさみうちにより求める極限は

$$\frac{p}{p+1}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 18～24 分。採点ポイントは、曲線が各水平帯を 1 つずつ通ることから境界に触れる単位正方形を n 個と数えること、面積と単位正方形数の差をその n 個で評価すること、最後に誤差 $O(n)$ が主項 $n^{(p+1)/p}$ より小さいことを使うことです。

誤りやすいのは、格子点数 L_n と面積 S_n を完全に同じものとして扱うことです。実際には境界付近の誤差がありますが、その誤差は極限では消えます。厳密な個数を最後まで求める問題ではなく、面積を主項として誤差を評価する問題だと捉えると整理しやすいです。

【第 4 問 (a)】

空間内に四面体 $OABC$ があり $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ はすべて 90° であるとする. 辺 OA, OB, OC の長さを, それぞれ a, b, c とし, 三角形 ABC の重心を G とする.

- (1) $\angle OGA, \angle OGB, \angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ.
- (2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする. 点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き, 点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く. このとき, 線分 OQ の長さの最小値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

三直角の頂点 O を原点に置き, A, B, C を 3 本の座標軸上にとる. (1) は重心 G を求め, $\angle OGA = 90^\circ$ など内積 0 の条件に直す. (2) は点 P を直線 AD 上の媒介変数 λ で表し, 重心条件から Q の座標を出す. 最後に OQ^2 を λ の二次式として最小化する.

【解答】

(1) $O = (0, 0, 0), A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0), C = (0, 0, c)$ とおくことができる. 三角形 ABC の重心は $G = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ である. $\angle OGA = 90^\circ$ であることは $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GA} = 0$ と同値である. ここで

$$\overrightarrow{GO} = \left(-\frac{a}{3}, -\frac{b}{3}, -\frac{c}{3}\right), \quad \overrightarrow{GA} = \left(\frac{2a}{3}, -\frac{b}{3}, -\frac{c}{3}\right)$$

なので $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GA} = \frac{-2a^2 + b^2 + c^2}{9}$ である. よって $2a^2 = b^2 + c^2$ を得る.

同様に $2b^2 = c^2 + a^2, 2c^2 = a^2 + b^2$ である. 3 式を比べると $a^2 = b^2 = c^2$ であり, 長さは正なので $a = b = c$ である. 逆に $a = b = c$ なら上の 3 式はすべて成り立つので, これは必要十分条件である.

(2) 線分 BC を $BD:DC = 1:2$ に内分する点は $D = \frac{2B+C}{3} = \left(0, \frac{2b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ である. 点 P は直線 AD 上にあるので, 実数 λ を用いて

$$\begin{aligned} P &= A + \lambda(D - A) \\ &= \left(a(1 - \lambda), \frac{2b\lambda}{3}, \frac{c\lambda}{3}\right) \end{aligned}$$

と表せる. $P \neq A$ なので $\lambda \neq 0$ であるが, 後で得る最小点は $\lambda \neq 0$ を満たす.

三角形 APQ の重心が G であるから $\frac{A+P+Q}{3} = G$ である. したがって $Q = 3G - A - P = (a, b, c) - A - P$ より

$$Q = \left(a(\lambda - 1), b\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right), c\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)\right)$$

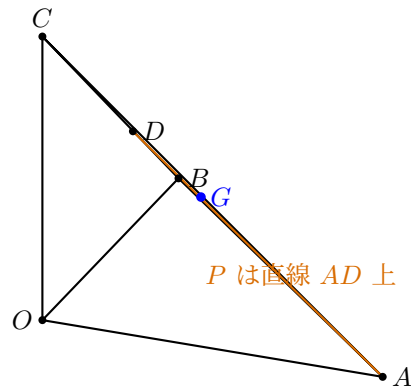
である.

よって

$$OQ^2 = a^2(\lambda - 1)^2 + b^2\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right)^2 + c^2\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)^2$$

である. これは λ の二次式であり, 最小にする λ は $\lambda = \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$ である. この値を代入すると $\min OQ^2 = \frac{a^2b^2 + 4a^2c^2 + b^2c^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$ となる. したがって $\min OQ = \sqrt{\frac{a^2b^2 + 4a^2c^2 + b^2c^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}$ である.

なお, (1) の条件 $a = b = c$ が成り立つ場合には $\min OQ = a\sqrt{\frac{3}{7}}$ となる.



▶ 解法 2 (平面の法線と点・直線距離)

【方針】

(1) は平面 ABC の法線と $\overrightarrow{OG}$ の平行条件にする。(2) は $\overrightarrow{OQ}$ が描く直線と原点の距離をベクトルで求める。

【解答】

(1)

$$A = (a, 0, 0), \quad B = (0, b, 0), \quad C = (0, 0, c)$$

とおく。平面 ABC は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

であり、法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right).$$

3つの角が直角であることは $\overrightarrow{OG}$ が平面 ABC に垂直であることと同値である。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(a, b, c)$$

だから $\overrightarrow{OG} \parallel \mathbf{n}$ より

$$a^2 = b^2 = c^2.$$

長さは正なので $a = b = c$ であり、逆も明らかである。

(2)

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AD}$ とすると、重心条件から

$$\overrightarrow{OQ} = (-a, b, c) + \frac{t}{3}(3a, -2b, -c).$$

したがって Q は、点ベクトル

$$\mathbf{r} = (-a, b, c)$$

を通り方向ベクトル

$$\mathbf{d} = (3a, -2b, -c)$$

をもつ直線上を動く。原点からこの直線までの距離は

$$\frac{\sqrt{|\mathbf{r}|^2|\mathbf{d}|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})^2}}{|\mathbf{d}|}.$$

分子を整理すると

$$a^2b^2 + 4a^2c^2 + b^2c^2$$

となるので

$$\min OQ = \sqrt{\frac{a^2b^2 + 4a^2c^2 + b^2c^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 20～26 分。採点ポイントは、三直角を座標軸に置くこと、重心から出るベクトルの内積で直角条件を書くこと、(2) で P と Q を媒介変数で正確に表すことです。

誤りやすいのは、(2) が (1) の条件 $a = b = c$ を仮定していると決めつけてしまうことです。問題文上は一般の a, b, c に対して最小値を求めるのが自然なので、一般式を出したうえで、必要なら $a = b = c$ の場合を補足します。二次式の最小化では OQ ではなく OQ^2 を扱うと計算が安定します。

【第 4 問 (b)】

$0 < a < 1$ である定数 a に対し、複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を l とする。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 複素数 z が l 上を動くとき、 z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。
- (2) 直線 l を、原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。 m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$z = t + ai$ において z^2 の実部・虚部を計算し、 t を消去して放物線を得る。回転後の直線は、元の直線に戻したときの虚部が a であることから方程式を立てる。放物線と直線を連立し、 $\sin \theta$ の値で二次方程式の判別式と一次式に退化する場合を分ける。

【解答】

(1) $z = t + ai$ とおくと $z^2 = (t + ai)^2 = t^2 - a^2 + 2ati$ である。 $z^2 = X + iY$ とおけば $X = t^2 - a^2$, $Y = 2at$ である。したがって $t = \frac{Y}{2a}$ を消去して $X = \frac{Y^2}{4a^2} - a^2$ を得る。

よって軌跡は、頂点 $(-a^2, 0)$ 、軸が X 軸で、 X 軸の正の向きに開く放物線である。

(2) 点 $X + iY$ が回転後の直線 m 上にあることは、これを角 $-\theta$ だけ戻した点が直線 l 上にあることと同値である。したがって $\text{Im}\{(X + iY)(\cos \theta - i \sin \theta)\} = a$ であり、 $-X \sin \theta + Y \cos \theta = a$ が m の方程式である。

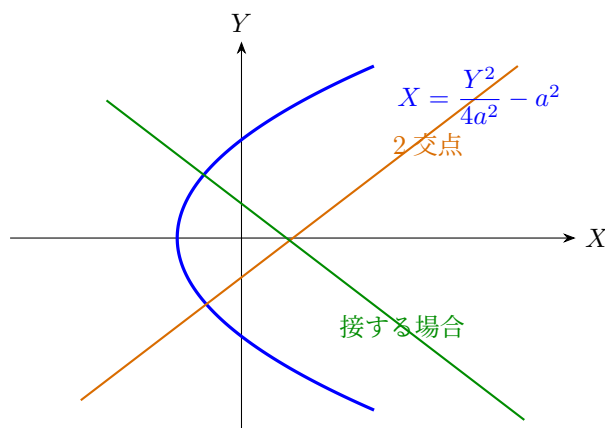
(1) の放物線 $X = \frac{Y^2}{4a^2} - a^2$ を代入すると $-\left(\frac{Y^2}{4a^2} - a^2\right) \sin \theta + Y \cos \theta = a$ である。 $\sin \theta \neq 0$ のとき、これは Y の二次方程式であり、その判別式は正の定数倍を除いて $1 - \frac{\sin \theta}{a}$ である。したがって、 $\sin \theta < a$ なら 2 点、 $\sin \theta = a$ なら 1 点、 $\sin \theta > a$ なら 0 点である。

ただし $\sin \theta = 0$ のときは二次方程式ではなく $Y \cos \theta = a$ となり、 $\cos \theta = \pm 1$ なので放物線と 1 点で交わる。

以上より交点の個数は

$$\begin{cases} 2 & (\sin \theta < a, \sin \theta \neq 0), \\ 1 & (\sin \theta = 0 \text{ または } \sin \theta = a), \\ 0 & (\sin \theta > a) \end{cases}$$

である。特に $\sin \theta < 0$ のときは第 1 の場合に含まれ、2 点で交わる。



▶ 解法 2 (平方完成による交点判定)

【方針】

放物線と回転後の直線を連立した式を Y について平方完成する。二次方程式が退化する $\sin \theta = 0$ を先に分ける。

【解答】

(1)

$$z^2 = (t^2 - a^2) + 2at i$$

より、 $z^2 = X + iY$ の軌跡は

$$X = \frac{Y^2}{4a^2} - a^2.$$

(2) 回転後の直線 m は

$$-X \sin \theta + Y \cos \theta = a.$$

$\sin \theta = 0$ なら $Y = \pm a$ となり、放物線との交点は 1 個である。

$\sin \theta \neq 0$ のとき放物線を代入し、 Y の二次方程式として整理すると

$$(\sin \theta)Y^2 - 4a^2(\cos \theta)Y - 4a^3(a \sin \theta - 1) = 0.$$

判別式 D は

$$\frac{D}{4} = 4a^3(a - \sin \theta).$$

よって交点数は

$$\begin{cases} 2 & (-1 \leq \sin \theta < 0, \ 0 < \sin \theta < a), \\ 1 & (\sin \theta = 0, \ a), \\ 0 & (a < \sin \theta \leq 1). \end{cases}$$

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 16~22 分。採点ポイントは、 z^2 の軌跡を放物線として出すこと、回転した直線の方程式 $-X \sin \theta + Y \cos \theta = a$ を正しく立てること、 $\sin \theta = 0$ で二次方程式が一次式に退化する点を別に扱うことです。

誤りやすいのは、 $0 < \sin \theta$ の場合だけで答えてしまうことです。問題は $\sin \theta$ の値で場合分けするので、 $\sin \theta < 0$ や $\sin \theta = 0$ も落とさないようにします。判別式は $1 - \sin \theta/a$ に対応するため、接するときは $\sin \theta = a$ です。

■ 【第 4 問 (c)】

座標平面上に $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて、 $y \leq x(a - x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし、 $0 < a \leq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$, 2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として、ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり、当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

当たる確率は単位正方形内で $0 \neq y \leq x(a - x)$ を満たす部分の面積である。 $0 < a \leq 1$ では正になる範囲が $0 \leq x \leq a$ 、 $1 < a \leq 2$ では正方形の幅全体 $0 \leq x \leq 1$ を積分する。(2)(3) は独立試行として、1 回だけ当たる確率、少なくとも 1 回当たる確率、期待値を当たり確率 p で表す。

【解答】

(1) 当たりの確率を $p(a)$ とする。単位正方形の面積は 1 なので、求める確率は $0 \leq y \leq x(a - x)$ となる部分の面積である。

まず $0 < a \leq 1$ のとき、 $x(a-x) \geq 0$ となるのは $0 \leq x \leq a$ である。したがって

$$\begin{aligned} p(a) &= \int_0^a x(a-x) dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

次に $1 < a \leq 2$ のとき、正方形内では $0 \leq x \leq 1$ を考えればよく、この範囲で $x(a-x) \geq 0$ である。また最大値も 1 以下である。よって

$$\begin{aligned} p(a) &= \int_0^1 x(a-x) dx \\ &= \frac{a}{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

したがって

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a^3}{6} & (0 < a \leq 1), \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{3} & (1 < a \leq 2) \end{cases}$$

である。

(2) (1) より

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}, \quad p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

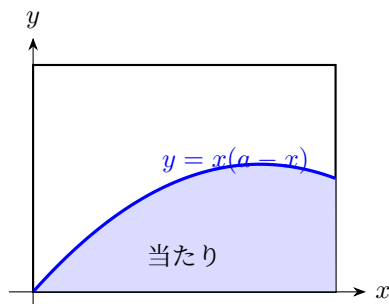
である。2 回の試行は独立なので、1 回だけ当たる確率は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{48} \left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \frac{5}{12} \\ &= \frac{1}{48} \cdot \frac{7}{12} + \frac{47}{48} \cdot \frac{5}{12} \\ &= \frac{121}{288}. \end{aligned}$$

(3) 当たり確率を p とする。3 回落として少なくとも 1 回当たる確率は $1 - (1-p)^3$ である。また当たりの数の期待値は $3p$ である。条件は $1 - (1-p)^3 \geq \frac{19}{27}$, $3p \leq \frac{3}{2}$ である。

第 1 の不等式は $(1-p)^3 \leq \frac{8}{27}$ であり、 $0 \leq p \leq 1$ なので $1-p \leq \frac{2}{3}$ すなわち $p \geq \frac{1}{3}$ である。第 2 の不等式は $p \leq \frac{1}{2}$ である。したがって $\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{1}{2}$ となればよい。

(1) の式を見ると、 $0 < a \leq 1$ では $p(a) \leq 1/6$ なので条件を満たさない。したがって $1 < a \leq 2$ で $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ を解けばよい。これより $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}$ である。



▶ 解法 2 (確率を先に逆算)

【方針】

面積から 1 回の当たり確率 $p(a)$ を求める。(3) は二項分布の条件を先に $1/3 \leq p \leq 1/2$ へ直し、単調な $p(a)$ を逆算する。

【解答】

(1) 単位正方形内で放物線の下にある面積を積分すると

$$p(a) = \begin{cases} \int_0^a x(a-x) dx = \frac{a^3}{6} & (0 < a \leq 1), \\ \int_0^1 x(a-x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} & (1 < a \leq 2). \end{cases}$$

(2)

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}, \quad p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{12}.$$

したがって 1 回だけ当たる確率は

$$\frac{1}{48} \cdot \frac{7}{12} + \frac{47}{48} \cdot \frac{5}{12} = \frac{121}{288}.$$

(3) 3 回のうち少なくとも 1 回当たる確率と期待値の条件は

$$1 - (1-p)^3 \geq \frac{19}{27}, \quad 3p \leq \frac{3}{2}.$$

よって

$$\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{1}{2}.$$

$0 < a \leq 1$ では $p \leq \frac{1}{6}$ なので不可能である。 $1 < a \leq 2$ で

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$$

を解き、

$$\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}.$$

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 15~20 分。採点ポイントは、当たり確率を面積として正しく積分すること、 $a = 1$ を境に積分範囲を変えること、(3) で確率条件をまず p の範囲に直してから a に戻すことです。

誤りやすいのは、 $1 < a \leq 2$ のときも $0 \leq x \leq a$ で積分してしまうことです。ボールは単位正方形内に落ちるので、 x の範囲は最大でも $[0, 1]$ です。また期待値は二項分布の平均として $3p$ とすぐ出せるため、個別の場合分けより先に p で整理すると計算が軽くなります。

【第 5 問 (a)】

座標平面上に点 $P(a, b)$ があり, P は $|a| \leq \frac{1}{2}, |b| \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動く. また, 点 $Q(x, y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている. ただし, $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$ である.

- (1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする. $P \neq O$ のとき, $\frac{RQ}{OP}$ の最大値を求め, その最大値を与える点 P の全体を図示せよ.
- (2) OQ の最小値と, その最小値を与える点 P の座標を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず連立方程式を解いて Q を a, b で表す. (1) は $R = (1, -1)$ からの変位 $(2a+b, a+2b)$ を使い, RQ^2/OP^2 を二次式の比として最大化する. (2) は OQ^2 を (a, b) の二次式として, 正方形領域 $|a|, |b| \leq 1/2$ 上で最小化する. 内部で 0 にできないことを確認し, 境界を調べて最短点を決める.

【解答】

(1)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

より

$$Q = (1 + 2a + b, -1 + a + 2b), \quad R = (1, -1)$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \frac{RQ^2}{OP^2} &= \frac{(2a+b)^2 + (a+2b)^2}{a^2 + b^2} \\ &= 9 - \frac{4(a-b)^2}{a^2 + b^2} \leq 9. \end{aligned}$$

等号は $a = b$ のときに限る. よって最大値は 3 であり, 最大値を与える点は

$$a = b, \quad 0 < |a| \leq \frac{1}{2}$$

を満たす線分上の点、すなわち原点を除く

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ と } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

を結ぶ線分である.

(2)

$$u = a + b, \quad v = a - b$$

とおく. 条件 $|a| \leq \frac{1}{2}, |b| \leq \frac{1}{2}$ は

$$|u| + |v| \leq 1$$

と同値である. また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= (1 + 2a + b)^2 + (-1 + a + 2b)^2 \\ &= 2 + 2v + \frac{9u^2 + v^2}{2} \\ &= \frac{9}{2}u^2 + \frac{1}{2}(v+2)^2. \end{aligned}$$

固定した v に対しては $u = 0$ で最小である. さらに $-1 \leq v \leq 1$ では $\frac{1}{2}(v+2)^2$ は $v = -1$ で最小となる. よって

$$u = 0, \quad v = -1$$

すなわち

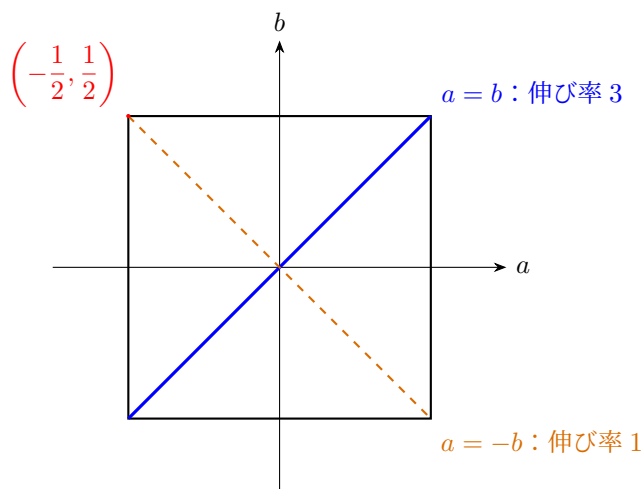
$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

のとき

$$\min OQ^2 = \frac{1}{2}.$$

したがって

$$\min OQ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



▶ 解法 2 (固有方向に分解)

【方針】

$(1, 1)$ 方向と $(1, -1)$ 方向へ分解する。線形変換の伸び率がそれぞれ 3 と 1 であることから比の最大値を出し、同じ座標で OQ^2 も最小化する。

【解答】

(1)

$$u = a + b, \quad v = a - b$$

とおくと

$$OP^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad RQ^2 = \frac{9u^2 + v^2}{2}.$$

したがって

$$\frac{RQ^2}{OP^2} = \frac{9u^2 + v^2}{u^2 + v^2} \leq 9.$$

等号は $v = 0$ 、すなわち $a = b$ のときである。指定された正方形内で原点を除いた対角線上が等号点で、最大値は 3 である。

(2) また

$$OQ^2 = \frac{9}{2}u^2 + \frac{1}{2}(v+2)^2, \quad |u| + |v| \leq 1.$$

最小化にはまず $u = 0$ とすればよい。そのとき $-1 \leq v \leq 1$ であり、 $(v+2)^2$ は $v = -1$ で最小である。ゆえに

$$(u, v) = (0, -1)$$

すなわち

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \min OQ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 20～26 分。採点ポイントは、行列を解いて $Q = (1 + 2a + b, -1 + a + 2b)$ を出すこと、(1) で二次式の比を $9 - (2a - 2b)^2 / (a^2 + b^2)$ と評価すること、(2) で正方形領域の境界まで確認することです。

誤りやすいのは、(2) で $Q = O$ となる点 $(-1, 1)$ をそのまま答えにしまうことです。この点は許された正方形の外にあります。また、(1) の最大値を与える点は直線 $a = b$ 全体ではなく、指定された正方形内かつ $P \neq O$ の部分に限られます。

【第 5 問 (b)】

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である定数とする. 座標平面上で, $a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q, R とし, 接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく. 点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている. 点 P の全体が作る図形を G とする.

- (1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき, $\tan \theta$ を m_1 と m_2 で表せ.
- (2) G を数式で表せ.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ.

▶ 解法 1

【方針】

放物線 $y = x^2/4$ の接線を傾き m で $y = mx - m^2$ と表す. 点 $P(a, b)$ を通る接線の傾きは $m^2 - am + b = 0$ の 2 根なので, 根と係数の関係で $m_1 + m_2, m_1 m_2, m_2 - m_1$ を a, b に直す. 角度条件は $\tan \theta = |(m_2 - m_1)/(1 + m_1 m_2)|$ として, $b = -1$ の直角の場合を除き, 軌跡の式を得る.

【解答】

(1) 接点を $Q = (2m_1, m_1^2), R = (2m_2, m_2^2)$ とする. 2 接線の交点は

$$P = (m_1 + m_2, m_1 m_2)$$

である. $m_1 < 0 < m_2$ のとき, 点 P から接点へ向かう 2 本の半直線が作る角を θ とすれば

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

右辺が正であるため $1 + m_1 m_2 < 0$ である.

(2) 放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の傾き m の接線は

$$y = mx - m^2$$

である. これが $P(a, b)$ を通る条件は

$$m^2 - am + b = 0.$$

その 2 根を $m_1 < m_2$ とすると

$$m_1 + m_2 = a, \quad m_1 m_2 = b, \quad m_2 - m_1 = \sqrt{a^2 - 4b}.$$

(1) と $\tan \theta > 0$ から

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}, \quad b < -1.$$

したがって

$$G: a^2 - 4b = (1 + b)^2 \tan^2 \theta, \quad b < -1.$$

逆にこの条件を満たす点では 2 本の接線が存在し, その半直線のなす角は θ であるから, これは必要十分である.

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ では

$$(b + 3)^2 - a^2 = 8, \quad b < -1.$$

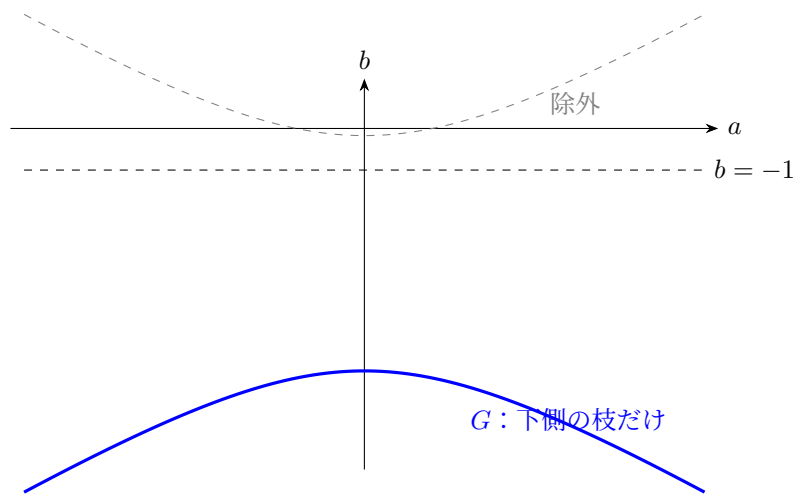
よって G は双曲線

$$(b + 3)^2 - a^2 = 8$$

の下側の枝

$$b = -3 - \sqrt{a^2 + 8}$$

だけである. 上側の枝では 2 本の接線が作る角が鋭角 $\frac{\pi}{4}$ にならない。



▶ 解法 2 (接点への半直線ベクトル)

【方針】

接線の傾きを根として扱い、点 P から 2 接点へ向かうベクトルの内積・行列式で角を求める。これにより枝の条件 $b < -1$ も同時に決定する。

【解答】

(1) 接線の傾きを $m_1 < m_2$ とすると

$$P = (m_1 + m_2, m_1 m_2).$$

接点 $Q = (2m_1, m_1^2)$, $R = (2m_2, m_2^2)$ へのベクトルは

$$\overrightarrow{PQ} = -(m_2 - m_1)(1, m_1), \quad \overrightarrow{PR} = (m_2 - m_1)(1, m_2).$$

したがって内積は

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = -(m_2 - m_1)^2(1 + m_1 m_2).$$

θ は鋭角だから内積は正であり、

$$1 + m_1 m_2 < 0.$$

すなわち $b = m_1 m_2 < -1$ である。また行列式と内積の比から

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{-(1 + m_1 m_2)} = -\frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}.$$

(2) よって

$$a^2 - 4b = (1 + b)^2 \tan^2 \theta, \quad b < -1.$$

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ なら

$$(b + 3)^2 - a^2 = 8, \quad b < -1,$$

したがって下側の枝

$$b = -3 - \sqrt{a^2 + 8}$$

だけが G である。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 20～26 分。採点ポイントは、傾き m の接線を $y = mx - m^2$ と表すこと、傾き m_1, m_2 を 2 次方程式の根として扱うこと、角度公式では絶対値と $b = -1$ の直角の場合を落とさないことです。

誤りやすいのは、 $1 + b > 0$ と決めつけて軌跡の下側の枝を消してしまうことです。 θ は鋭角なので、傾きの公式は絶対値で扱うのが安全です。 $\theta = \pi/4$ では双曲線 $(b + 3)^2 - a^2 = 8$ の上側・下側の 2 枝が対象になります。

【第 5 問 (c)】

n を 2 以上の自然数とする. 数列 $\{S_n\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている.

- (1) 不等式 $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ が成り立つことを示せ.
 (2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して, $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ ($k = 1, 2, \dots$) とおく. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ. また,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$$

となる n の整式 $p(n)$ を求めよ.

- (3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $1/x$ のグラフと長方形の面積を比較して調和和を上下から評価する。(2) は積の階差 $\Delta(a_k b_k)$ を展開して和を取る。後半はこの公式に $a_k = k$, $b_k = S_k$ を入れ, $\Delta S_k = 1/(k+1)$ を使って $p(n)$ を求める。(3) は (2) の式で左辺を $S_n - 1/2$ に直し, (1) の評価を使う。

【解答】

(1) 関数 $1/x$ は $x > 0$ で減少する。したがって各 $k = 1, 2, \dots, n$ について

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$$

であり、これを足すと

$$\log(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$$

を得る。

また $k = 2, 3, \dots, n$ について

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$$

である。よって

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \log n$$

である。したがって $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ である。

(2) $\Delta(a_k b_k) = a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k$ である。右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \Delta(a_k b_k) &= a_k(b_{k+1} - b_k) + b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_k \Delta b_k + b_{k+1} \Delta a_k. \end{aligned}$$

したがって $a_k \Delta b_k = \Delta(a_k b_k) - b_{k+1} \Delta a_k$ である。これを $k = 1$ から $n-1$ まで足すと

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

を得る。

次に $a_k = k$, $b_k = S_k$ とする。このとき $\Delta S_k = S_{k+1} - S_k = \frac{1}{k+1}$, $\Delta a_k = 1$ である。公式より

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{1}{k+1} = nS_n - S_1 - \sum_{k=1}^{n-1} S_{k+1}.$$

これを直接使って整理してもよいが、求めたい和は次のように順序を入れ替えると速い。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k &= \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{n-1} k \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \left\{ \frac{n(n-1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} S_{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j-1). \end{aligned}$$

ここで

$$S_{n-1} = S_n - \frac{1}{n}, \quad \sum_{j=1}^{n-1} (j-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

だから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k &= \frac{n(n-1)}{2} \left(S_n - \frac{1}{n} \right) - \frac{(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} S_n - \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} S_n - \frac{n(n-1)}{4} \\ &= \left(S_n - \frac{1}{2} \right) \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

したがって $p(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ である。

(3) (2) より

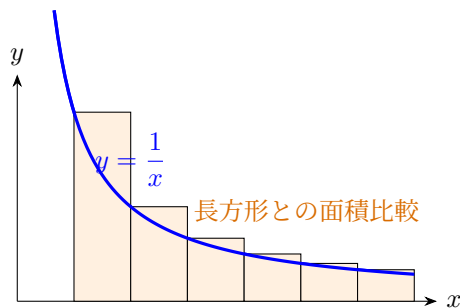
$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \frac{1}{2}$$

である。したがって示すべき不等式は $|S_n - \frac{1}{2} - \log n| < \frac{1}{2}$ である。

(1) より $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ だから $\log(n+1) - \log n - \frac{1}{2} < S_n - \frac{1}{2} - \log n < \frac{1}{2}$ である。右側はすでに示されている。左側については $\log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ なので $\log(n+1) - \log n - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ である。よって $-\frac{1}{2} < S_n - \frac{1}{2} - \log n < \frac{1}{2}$ であり、

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つ。



▶ 解法 2 (設問の部分積分公式を直接使用)

【方針】

(1) は面積比較で示す。(2) 後半は証明した和の部分積分公式へ $a_k = S_k$ 、 $\Delta b_k = k$ を代入して一度で求める。

【解答】

(1) $1/x$ の単調減少性から

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} \quad (k \geq 2).$$

和を取れば

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n.$$

(2)

$$a_k \Delta b_k + b_{k+1} \Delta a_k = a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k$$

を $k = 1, \dots, n-1$ で足せば、設問の公式を得る。

この公式に

$$a_k = S_k, \quad \Delta b_k = k$$

を用いる。 $\Delta a_k = \frac{1}{k+1}$ であり、

$$b_k = \frac{k(k-1)}{2}$$

と取れるので

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k &= S_n \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} S_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \left(S_n - \frac{1}{2} \right) \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$p(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

(3)

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n = S_n - \log n - \frac{1}{2}.$$

(1) よりこの値は $-\frac{1}{2}$ より大きく $\frac{1}{2}$ より小さいので、所要の絶対値不等式が従う。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 20~26 分。採点ポイントは、(1) の積分比較を正しい向きで書くこと、(2) の和の部分積分公式を階差から導くこと、

$$\sum k S_k$$

を $(S_n - 1/2)n(n-1)/2$ まで整理することです。

誤りやすいのは、 $S_{n-1} = S_n - 1/n$ の変換を忘れて、答えが S_{n-1} のまま残ることです。(3) は (2) の結果を使えばほぼ S_n と $\log n$ の比較だけになります。絶対値不等式は上下を別々に確認すると安全です。