

九州大学 2008 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上の点 A, B, C の座標をそれぞれ $(0, a), (b, 0), (c, 0)$ とする。ただし $a > 0, b < 0, c > 0$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 BCH の垂心が点 A となるような点 H の座標を求めよ。
- (2) 線分 HA の中点を M , 線分 BC の中点を P , 線分 BH の中点を Q とする。 $\angle PQM = 90^\circ$ であることを示せ。
- (3) 点 P, Q, M を通る円の中心 N の座標を求めよ。
- (4) 点 P, Q, M を通る円は、線分 AB の中点 R および原点も通ることを示せ。

注 原問題の「重心」は、設問 (2) 以降および標準解答との整合から「垂心」の誤植と判断し、補正した。

【方針】

BC が x 軸上にあるので、垂心条件から AH は y 軸方向となり、 $H = (0, h)$ とおける。残る垂直条件で h を決めた後、中点 P, Q, M の座標を出す。(2) は内積で直角を確認し、(3)(4) は直径 PM の円に乗る条件 $(X - P) \cdot (X - M) = 0$ で処理する。

【解答】

(1) BC は x 軸上の線分なので、 $BC \perp AH$ より H は y 軸上にある。そこで $H = (0, h)$ とおく。さらに $BA \perp CH$ であるから、傾きの積を用いて $\frac{a}{0-b} \cdot \frac{h}{0-c} = -1$ すなわち $\left(-\frac{a}{b}\right) \left(-\frac{h}{c}\right) = -1$ である。よって $h = -\frac{bc}{a}$ となり、 $H = \left(0, -\frac{bc}{a}\right)$ である。実際、この値に対して $CA \perp BH$ も成り立つ。

(2)

各中点は

$$P = \left(\frac{b+c}{2}, 0\right), \quad Q = \left(\frac{b}{2}, -\frac{bc}{2a}\right), \quad M = \left(0, \frac{a^2-bc}{2a}\right)$$

である。したがって

$$\overrightarrow{QP} = \left(\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a}\right), \quad \overrightarrow{QM} = \left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

となる。内積を計算すると

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QM} = \frac{c}{2} \left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{bc}{2a} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{bc}{4} + \frac{bc}{4} = 0$$

であるから、 $\angle PQM = 90^\circ$ である。

(3)

(2) より $\triangle PQM$ は Q を直角とする直角三角形である。したがって P, Q, M を通る円の中心は斜辺 PM の中点である。よって $N = \frac{P+M}{2} = \left(\frac{b+c}{4}, \frac{a^2-bc}{4a}\right)$ である。

(4)

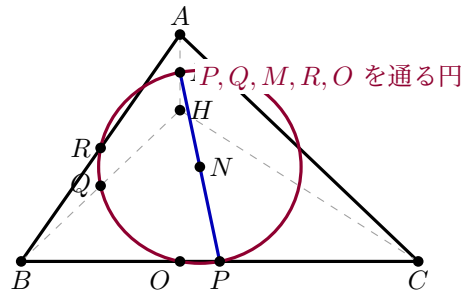
円は PM を直径とする円であるから、点 X がこの円上にあることは $(X - P) \cdot (X - M) = 0$ と同値である。

まず原点 $O = (0, 0)$ については、 P の y 座標が 0、 M の x 座標が 0 なので $(O - P) \cdot (O - M) = P \cdot M = 0$ であり、原点は円上にある。

次に R は AB の中点だから $R = \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ である。よって

$$R - P = \left(-\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad R - M = \left(\frac{b}{2}, \frac{bc}{2a}\right)$$

となり、 $(R - P) \cdot (R - M) = -\frac{bc}{4} + \frac{bc}{4} = 0$ である。したがって R も同じ円上にある。

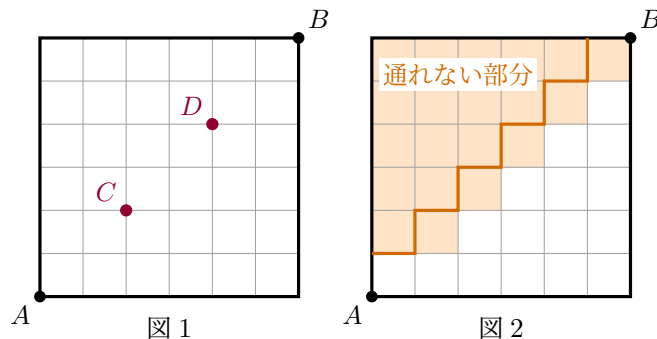


$\angle PQM = 90^\circ$ なので、円の直径は PM 。

【総評】 難度 5, 計算量 5。垂心条件を使うと座標がほぼ一意に決まり、後半は中点と内積の計算に帰着する。(2) の直角を示した時点で、 P, Q, M の円は直径 PM の円と見抜けるため、(3)(4) が一気に短くなる。傾き計算では $b < 0, c > 0$ の符号に引っ張られて H の y 座標の符号を誤りやすい。15 分程度で、座標を丁寧に整理して解きたい。

【第 2 問】

右の図 1 と図 2 は碁盤の目状の道路とし、すべて等間隔であるとする。



道路は格子線上にあり、図 2 では橙色の斜線側へ入れない。

以下の問いに答えよ。

- (1) 図 1 において、点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。
- (2) 図 1 において、点 A から点 B に行く最短経路で、点 C と点 D のどちらも通らないものは全部で何通りあるか求めよ。
- (3) 図 2 において、点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。ただし斜線の部分は通れないものとする。

▶ 解法 1

【方針】

図 1・図 2 の位置関係を読み取り、図 1 は A から B まで横 6 回・縦 6 回進む格子、 $C = (2, 2)$, $D = (4, 4)$ として数える。最短経路は右・上の 12 手の並べ方であり、(2) は C, D を通る経路を包除原理で除く。(3) は斜線部分に入る経路を、最初に境界を越える点で反射させる標準対応により数える。

【解答】

(1)

図 1 では A から B まで、右へ 6 回、上へ 6 回進む最短経路を考える。したがって 12 回の移動のうち、上へ進む 6 回の位置を選べばよいから ${}_{12}C_6 = \frac{12!}{6!6!} = 924$ 通りである。

(2)

図 1 の座標を $A = (0, 0)$, $B = (6, 6)$, $C = (2, 2)$, $D = (4, 4)$ と読む。 C を通る最短経路は、 A から C までが右 2 回・上 2 回、 C から B までが右 4 回・上 4 回なので ${}_4C_2 {}_8C_4 = 6 \cdot 70 = 420$ 通りである。同様に D を通る経路も 420 通りである。また、 C と D の両方を通る経路は

$${}_4C_2 {}_4C_2 {}_4C_2 = 6^3 = 216$$

通りである。包除原理により、 C と D のどちらも通らない経路は $924 - (420 + 420 - 216) = 300$ 通りである。

(3)

図 2 の斜線部分に入らない最短経路は、座標でいえば常に $y \leq x$ を満たしながら $(0, 0)$ から $(6, 6)$ へ進む経路である。全経路は (1) と同じく 924 通りである。

斜線部分に入る経路は、初めて直線 $y = x + 1$ に到達する点を持つ。この初到達点までの部分を直線 $y = x + 1$ に関して反射すると、 $(-1, 1)$ から $(6, 6)$ への右 7 回・上 5 回の最短経路と一対一に対応する。したがって斜線部分に入る経路は ${}_{12}C_5 = 792$ 通りである。よって求める数は $924 - 792 = 132$ 通りである。

▶ 解法 2

【方針】

各格子点に「そこまで来る最短経路数」を書き、左と下の値を足す動的計画法で 3 問を統一的に数える。(2) では C, D の値を 0 にし、(3) では通れない側の格子点を 0 にする。

【解答】

(1) 格子点 (i, j) までの最短経路数を $T(i, j)$ とする。境界では

$$T(i, 0) = T(0, j) = 1$$

であり、内部では最後の 1 歩が左または下から来るので

$$T(i, j) = T(i - 1, j) + T(i, j - 1)$$

である。これを $0 \leq i, j \leq 6$ で順に埋めると

$$T(6, 6) = 924$$

を得る。

(2) 同じ漸化式を使い、通過を禁止する $C = (2, 2)$, $D = (4, 4)$ では値を 0 と置く。すなわち

$$T(2, 2) = T(4, 4) = 0$$

として表を埋め直すと

$$T(6, 6) = 300$$

となる。

(3) 図 2 では $j > i$ の格子点を通れないので、そこを全て 0 と置く。許される三角形領域では同じ加法則を使うと、 $i = 6$ の列は

$$T(6, 0), T(6, 1), \dots, T(6, 6) = 1, 6, 20, 48, 90, 132, 132$$

となる。したがって答えは

$$T(6, 6) = 132$$

通りである。

【総評】 難度 6, 計算量 5。図の読み取りを座標化できれば、(1)(2) は組合せの標準計算である。(2) では C と D の両方を通る経路を一度足し戻す包除原理が必要になる。(3) は通れない領域を直接数えるより、初めて境界を越える位置で反射させると一手で数えられる。解答では座標の取り方を最初に明記することが重要で、本番では図への書き込みも含めて 15 分程度が目安である。

【第 3 問】

行列 B, E, A をそれぞれ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = E + aB$ と定める。ここで a は実数とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $P = AP$ を満たすとき, x と y が満たすべき条件を求めよ。
- (2) 行列 A の表す移動が原点を通る直線に関する対称移動であるような a の値と, その直線を求めよ。
- (3) $A^n = E + u_n B$ を満たす実数 u_n を a と n を用いて表せ。ただし n は自然数とする。

▶ 解法 1

【方針】

まず $B^2 = 5B$ を直接計算しておく。 B は直線 $x = 2y$ 方向を 0 倍し, その垂直方向 $(1, -2)$ を 5 倍するので, $A = E + aB$ はそれぞれを 1 倍, $1 + 5a$ 倍する変換になる。対称移動の条件は固定直線上をそのままにし, 垂直方向を -1 倍することであり, A^n は $B^2 = 5B$ から係数の漸化式で求める。

【解答】

(1) $P = AP$ は $P = (E + aB)P$ すなわち $aBP = 0$ と同値である。 $a = 0$ のときは $A = E$ なので任意の x, y が条件を満たす。 $a \neq 0$ のときは $BP = 0$ である。成分で書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから $x = 2y$ である。

(2)

(1) より, $a \neq 0$ のとき直線 $x = 2y$ 上の点は A によって動かない。また

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから, 直線 $x = 2y$ に垂直な方向 $(1, -2)$ は $A = E + aB$ により $1 + 5a$ 倍される。

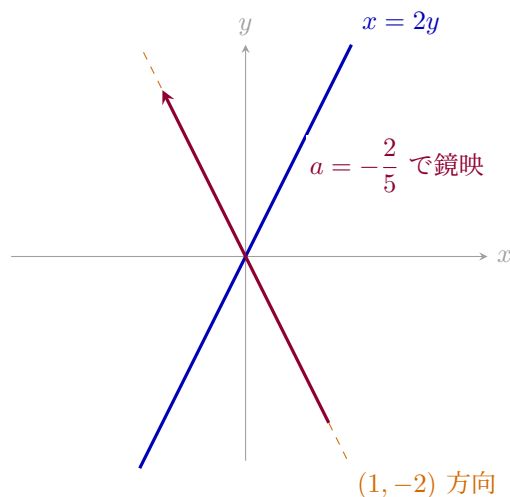
原点を通る直線に関する対称移動では, その直線上の成分はそのまま, 垂直方向の成分は符号が反対になる。したがって $1 + 5a = -1$ でなければならない。よって $a = -\frac{2}{5}$ であり, 対称軸は $x = 2y$ である。

(3)

まず

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} = 5B$$

である。 $A^n = E + u_n B$ とおくと, $u_1 = a$ であり, $A^{n+1} = (E + u_n B)(E + aB) = E + (a + u_n + 5au_n)B$ だから $u_{n+1} = a + u_n + 5au_n$ である。この式は $1 + 5u_{n+1} = (1 + 5a)(1 + 5u_n)$ と変形できる。 $1 + 5u_1 = 1 + 5a$ より $1 + 5u_n = (1 + 5a)^n$ となるので $u_n = \frac{(1 + 5a)^n - 1}{5}$ である。



青い直線上は固定され、垂直方向の成分だけが符号反転する。

▶ 解法 2

【方針】

B をベクトル $(1, -2)^T$ への正射影の 5 倍と見る。互いに直交する 2 方向への射影行列で A を分解すると、固定点・鏡映条件・累乗が同時に読み取れる。

【解答】

(1) $\vec{v} = (1, -2)^T$ とすると

$$B = \vec{v} \vec{v}^T$$

である。したがって

$$H = \frac{1}{5} B$$

は $\vec{v}$ 方向への正射影を表し、 $K = E - H$ はそれに垂直な直線 $x = 2y$ への正射影を表す。よって

$$A = E + aB = K + (1 + 5a)H.$$

$a = 0$ なら $A = E$ なので全ての x, y が $P = AP$ を満たす。 $a \neq 0$ なら固定されるのは $HP = 0$, すなわち

$$\vec{v}^T P = x - 2y = 0$$

を満たす点だけである。

(2) K 方向は常に 1 倍され、 H 方向は $1 + 5a$ 倍される。直線 $x = 2y$ に関する対称移動となるための条件は

$$1 + 5a = -1.$$

したがって

$$a = -\frac{2}{5}, \quad \text{対称軸は } x = 2y$$

である。

(3) $H^2 = H$, $K^2 = K$, $HK = KH = O$ だから

$$\begin{aligned} A^n &= \{K + (1 + 5a)H\}^n \\ &= K + (1 + 5a)^n H \\ &= E + \frac{(1 + 5a)^n - 1}{5} B. \end{aligned}$$

よって

$$u_n = \frac{(1 + 5a)^n - 1}{5}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 5。鍵は $B^2 = 5B$ と, $x = 2y$ 方向・それに垂直な方向で倍率が分かれることにある。(1) では $a = 0$ の場合だけ条件が全平面に広がるので, 場合分けを省かないこと。(2) は固定直線と垂直方向の -1 倍を確認すればよく, (3) は $1 + 5u_n$ に直して等比数列として処理する。行列計算の量は多くないため, 10 分前後で確実にまとめたい。

【第 4 問】

xy 平面上の双曲線 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$) と円 $C_2: x^2 + (y - \sqrt{a^2 + b^2})^2 = c^2$ ($c > 0$) について, 以下の問いに答えよ。

- (1) 双曲線 C_1 と円 C_2 が接するとき, c を a と b で表せ。
- (2) 双曲線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数が, 0 個, 1 個, 2 個, 3 個, 4 個のそれぞれの場合に c の取り得る範囲を a と b で表せ。
- (3) $c = \frac{b}{2} + 1$ のとき, 共有点が 2 個になる範囲を ab 平面上で図示せよ。

【方針】

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおき, 円の方程式に双曲線から得られる $x^2 = a^2(y^2/b^2 - 1)$ を代入して, 交点の y 座標を直接求める。得られる 2 つの候補 $b(b+c)/d, b(b-c)/d$ が双曲線上で実際に点を与えるには $|y| \geq b$ が必要で, 等号なら 1 点, 不等号なら左右対称に 2 点である。この判定で接する半径と共有点数を分類し, 最後は $c = b/2 + 1$ を代入して平方できる条件を注意して整理する。

【解答】

(1) $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおく。双曲線は $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ であるから, 交点では $x^2 = a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$ である。これを円 $x^2 + (y - d)^2 = c^2$ に代入すると $a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + (y - d)^2 = c^2$ すなわち $\frac{d^2}{b^2} y^2 - 2dy + b^2 - c^2 = 0$ となる。これを解くと $y = \frac{b(b+c)}{d}, y = \frac{b(b-c)}{d}$ である。

双曲線上の点が存在するには $|y| \geq b$ が必要で, 等号のときは $x = 0$ の 1 点になる。上側の候補 $b(b+c)/d$ が b に等しくなるのは $c = d - b$ のときであり, 下側の候補 $b(b-c)/d$ が $-b$ に等しくなるのは $c = d + b$ のときである。したがって接するときの c は $c = \sqrt{a^2 + b^2} - b, c = \sqrt{a^2 + b^2} + b$ である。

(2)

(1) の判定をそのまま用いる。 $0 < c < d - b$ では 2 つの候補のいずれも $|y| \geq b$ を満たさないの共有点はない。 $c = d - b$ では上側頂点で 1 点だけ共有する。 $d - b < c < d + b$ では上側の候補だけが $y > b$ となり, 左右対称な 2 点を共有する。 $c = d + b$ では上側の 2 点に加えて下側頂点で接するため 3 点である。 $c > d + b$ では上下それぞれで左右対称な 2 点を持つので 4 点である。

よって, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ として

共有点数	条件
0	$0 < c < d - b$
1	$c = d - b$
2	$d - b < c < d + b$
3	$c = d + b$
4	$c > d + b$

である。

(3)

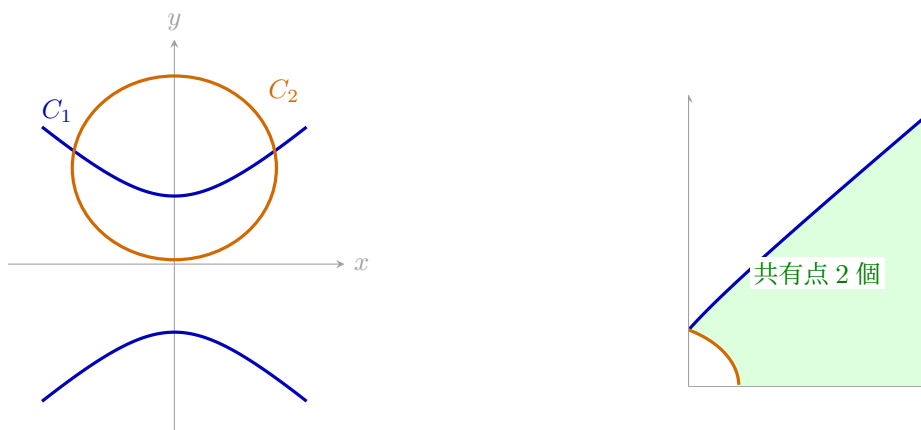
共有点が 2 個である条件は $d - b < \frac{b}{2} + 1 < d + b$ である。

左側の不等式は $d < \frac{3b}{2} + 1$ であり, 右辺は正なので平方してよい。よって $a^2 + b^2 < \left(\frac{3b}{2} + 1 \right)^2$ すなわち $a^2 < \frac{5}{4}b^2 + 3b + 1$ である。

右側の不等式は $1 - \frac{b}{2} < d$ である。 $b \geq 2$ なら左辺は 0 以下なので自動的に成り立つ。 $0 < b < 2$ のときは両辺が正なので平方して $\left(1 - \frac{b}{2} \right)^2 < a^2 + b^2$ すなわち $a^2 > 1 - b - \frac{3}{4}b^2$ を得る。

したがって図示すべき範囲は, $a > 0, b > 0$ のもとで $a^2 < \frac{5}{4}b^2 + 3b + 1$ を満たし, さらに $0 < b < 2$ では $a^2 > 1 - b - \frac{3}{4}b^2$

を満たす部分である。実際の図では、上側境界 $a = \sqrt{\frac{5}{4}b^2 + 3b + 1}$ の下側を取り、 $0 < b < 2/3$ に現れる下側境界 $a = \sqrt{1 - b - \frac{3}{4}b^2}$ の下側を除く。境界上は共有点数が 1 個または 3 個になるため含まない。



左：交点候補は上下の枝に現れる。右： $c = \frac{b}{2} + 1$ のときの (b, a) 領域 (境界は除く)。

【総評】 難度 8, 計算量 7. 距離の感覚だけで進めると、下側の枝でいつ 2 点が発生するかを取り違えやすい。交点の y 座標を先に出し、 $|y| \geq b$ と $b, -b$ の場合を分けると、共有点数 0 個から 4 個までを機械的に分類できる。(3) は平方する不等式の両辺の正負確認が重要で、特に $1 - b/2 < d$ は $b \geq 2$ で自動成立する。20 分以上かかり得る後期らしい重めの図形問題である。

【第 5 問】

関数 $f(x)$ ($x \geq -1$) を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{1+x} & (x \geq 0) \\ \frac{\log(1-x)}{1-x} & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$$

と定める。以下の問いに答えよ。なお、自然対数の底を e とし、必要ならば $2 < e < 3$ であることを用いてよい。

- (1) $f(x)$ の増減を調べよ。また、 $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。
- (2) 実数 a に対して、

$$S(a) = \int_{-1}^{e-1} |f(x) - a| dx$$

とおく。 $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$ における $S(a)$ の最小値を与える a の値を求めよ。

【方針】

(1) は左右の定義を別々に微分し、 $-1 \leq x < 0$ では $1 - x \leq 2 < e$ 、 $x \geq 0$ では $1 + x$ と e の大小で増減を読む。(2) は $x = -u$ とおくと左半分が $0 \leq u \leq 1$ の右側関数と同じ形になることを使い、重み付きの絶対値積分に直す。 $f(t) = a$ となる位置 t を用い、 a を少し動かしたときの符号付き長さの差から最小条件を求める。

【解答】

(1) $-1 \leq x < 0$ では $f(x) = \frac{\log(1-x)}{1-x}$ であり、微分すると $f'(x) = \frac{\log(1-x) - 1}{(1-x)^2}$ である。この範囲では $1 < 1-x \leq 2 < e$ なので $\log(1-x) - 1 < 0$ であり、 f は $[-1, 0)$ で減少する。 $x \geq 0$ では $f'(x) = \frac{1 - \log(1+x)}{(1+x)^2}$ である。したがって $0 < x < e-1$ で増加、 $x = e-1$ で極大、 $x > e-1$ で減少する。

値は $f(0) = 0$ 、 $f(e-1) = \frac{1}{e}$ 、 $f(-1) = \frac{\log 2}{2}$ である。関数 $\log t/t$ は $1 < t < e$ で増加するので、 $2 < e$ より $\log 2/2 < 1/e$ である。よって最小値は 0 で、これは $x = 0$ で取る。最大値は $\frac{1}{e}$ で、これは $x = e-1$ で取る。

(2) $0 \leq u \leq 1$ について $f(-u) = \log(1+u)/(1+u) = f(u)$ である。そこで $0 \leq x \leq e-1$ の関数 $\phi(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}$ を

用いると,

$$S(a) = 2 \int_0^1 |\phi(x) - a| dx + \int_1^{e-1} |\phi(x) - a| dx$$

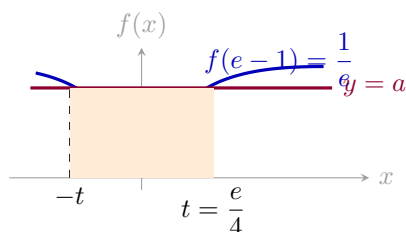
と書ける。 ϕ は $[0, e-1]$ で増加する。 $0 \leq a \leq 1/e$ に対して、 $\phi(t) = a$ となる t がただ 1 つ存在する。まず $0 \leq t \leq 1$ の場合を考える。 a を少し増やしたとき、 $\phi(x) < a$ の部分は積分値を増やし、 $\phi(x) > a$ の部分は積分値を減らす。重みを考えると $\frac{dS}{da} = 2t - \{2(1-t) + (e-2)\} = 4t - e$ である。したがって $\frac{dS}{dt} = (4t - e)\phi'(t)$ となる。 $0 < t < 1$ では $\phi'(t) > 0$ なので、この範囲での最小は $t = \frac{e}{4}$ のときである。 $2 < e < 3$ より $0 < e/4 < 1$ だから、確かにこの場合に含まれる。

次に $1 < t \leq e-1$ では、同じ考え方により $\frac{dS}{da} = \{2 + (t-1)\} - \{(e-1) - t\} = 2t + 2 - e$ である。ここでは $t > 1$ かつ $e < 3$ なので $2t + 2 - e > 0$ となり、最小点は現れない。

したがって求める a は $t = e/4$ に対応する値で,

$$a = \phi\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{\log(1 + e/4)}{1 + e/4} = \frac{4 \log \frac{4+e}{4}}{4+e}$$

である。



絶対偏差の最小値は、 $f(x) < a$ と $f(x) > a$ の区間長が釣り合う高さで生じる。

【総評】 難度 8, 計算量 7。前半は微分の符号だけだが、左側の定義域で $1 - x \leq 2 < e$ を使う点と、最大値を $x = -1$ と比較する点を省かないこと。(2) は絶対値を無理に全部展開するより、左右対称性で $0 \leq x \leq e-1$ の重み付き積分に直すと見通しがよい。最小条件は、 a より下にある部分の長さとお上にある部分の長さの釣り合いで決まり、 $t = e/4$ が自然に出る。20 分程度を要する計算整理型の難問である。