

九州大学 2008 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし、 e は自然対数の底とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の増減、凹凸、漸近線を調べ、グラフをかけ。
- (2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\}$ を求めよ。

【方針】

まず $f'(x)$, $f''(x)$ を計算して、単調性・凹凸・変曲点・水平漸近線を整理する。逆関数は $y = e^x/(e^x + 1)$ から $e^x = y/(1 - y)$ を解けばよい。最後の極限は逆関数の式に具体的な分数を代入し、 $n \log(1 + 1/n) \rightarrow 1$ に帰着させる。

【解答】

(1) $f(x) = e^x/(e^x + 1)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

である。したがって f は全実数で単調増加する。

さらに $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$ である。よって $x < 0$ では $f''(x) > 0$, $x > 0$ では $f''(x) < 0$ であり、 $x = 0$ で凹凸が変わる。変曲点は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ である。

また $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ なので、水平漸近線は $y = 0$, $y = 1$ である。以上をもとに、 $y = 0$ と $y = 1$ の間で単調増加し、 $(0, 1/2)$ で凹凸が変わる S 字型のグラフをかけばよい。

(2) $y = f(x)$ とおくと $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ である。 $0 < y < 1$ に注意して変形すると $y(e^x + 1) = e^x$, $y = e^x(1 - y)$ より $e^x = \frac{y}{1 - y}$ である。したがって $f^{-1}(y) = \log \frac{y}{1 - y}$ ($0 < y < 1$) である。変数名を x に戻せば $f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1 - x}$ ($0 < x < 1$) である。

(3)

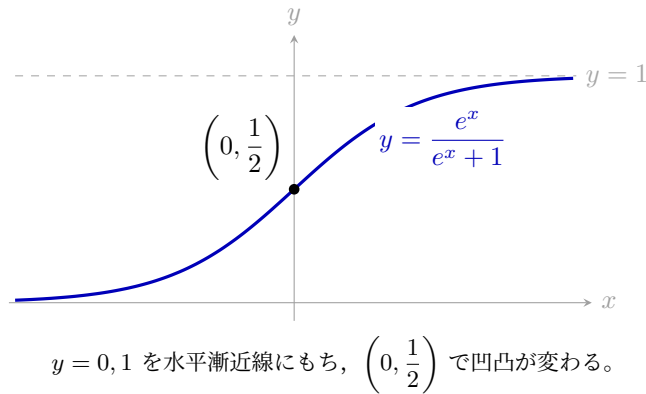
(2) より

$$f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) = \log \frac{1/(n+2)}{1 - 1/(n+2)} = \log \frac{1}{n+1} = -\log(n+1)$$

であり、

$$f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \log \frac{1/(n+1)}{1 - 1/(n+1)} = \log \frac{1}{n} = -\log n$$

である。したがって与式は $n\{-\log(n+1) + \log n\} = -n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ であるから、求める極限は -1 である。



【総評】 難度 5, 計算量 5。導関数と第二導関数の符号を正確に読む基本問題で、グラフでは水平漸近線と変曲点をそろえて描くことが大切である。逆関数では定義域・値域 $0 < x < 1$ を忘れないこと。(3) は代入後に符号が反転するため、 $-n \log(1 + 1/n)$ まで丁寧に変形するのが安全である。標準的には 12 分前後で解き切りたい。

【第 2 問】

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。 k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り、そのカードの番号が k より大きいなら、抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら、そのカードを戻さずに、残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り、2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して、得点が n である確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

得点が 1 回目で確定するのは、最初のカードが k より大きい場合だけである。得点 n が k 以下なら 1 回目に n 以外の k 以下を引いてから 2 回目に n を引く場合だけ、 $n > k$ なら 1 回目に n を引く場合と 2 回目に n を引く場合の和である。期待値はこの分布を用いて和を取るか、1 回目のカードで条件付き期待値に分けて確認する。

【解答】

(1) 得点が 1 になるには、1 回目に 1 以外の k 以下のカードを引き、そのカードを戻さずに 2 回目に 1 を引く必要がある。1 回目の選び方は $2, 3, \dots, k$ の $k-1$ 通りなので $P(1) = \frac{k-1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$ である。

得点が 10 になるのは、1 回目に 10 を引く場合、または 1 回目に k 以下のカードを引いて 2 回目に 10 を引く場合である。したがって $P(10) = \frac{1}{10} + \frac{k}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$ である。

(2) $2 \leq n \leq k$ のとき、 n は 1 回目では得点にならない。得点が n になるには、1 回目に k 以下で n 以外のカードを引き、2 回目に n を引く必要がある。よって $P(n) = \frac{k-1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$ ($2 \leq n \leq k$) である。 $k < n \leq 9$ のときは、1 回目に n を引く場合と、1 回目に k 以下を引いて 2 回目に n を引く場合があるので

$$P(n) = \frac{1}{10} + \frac{k}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90} \quad (k < n \leq 9)$$

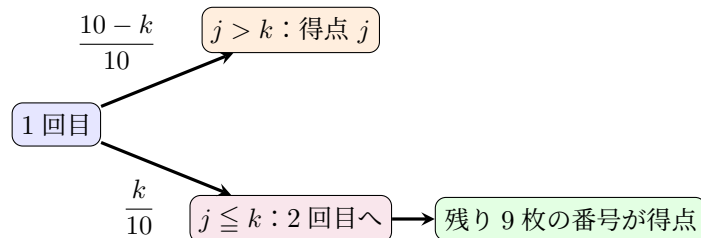
である。

(3) (1)(2) をまとめると、 $1 \leq n \leq k$ では $P(n) = (k-1)/90$ 、 $k+1 \leq n \leq 10$ では $P(n) = (k+9)/90$ である。したがって期

待値 E は

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_{n=1}^k n \frac{k-1}{90} + \sum_{n=k+1}^{10} n \frac{k+9}{90} \\
 &= \frac{k-1}{90} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k+9}{90} \left(55 - \frac{k(k+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{-k^2 + 10k + 99}{18}
 \end{aligned}$$

である。



得点分布は、1 回目で確定する場合と 2 回目へ進む場合を分けて数える。

▶ 解法 2

【方針】

2 回目まで進む試行を、1 回目と 2 回目の順序付きカード対として数える。得点が k 以下か大きいかで有利な対の個数が一定になることを先に示し、期待値だけは 1 回目の番号に関する条件付き平均でも計算して一致を確認する。

【解答】

(1) 2 回目まで進む場合の順序付きカード対は全部で $10 \cdot 9 = 90$ 通りである。得点 1 を作るには、1 回目が $2, 3, \dots, k$ のいずれか、2 回目が 1 であればよい。したがって

$$P(1) = \frac{k-1}{90}.$$

得点 10 は、1 回目に 10 を引く確率 $1/10$ と、1 回目に k 以下を引いて 2 回目に 10 を引く確率 $k/90$ の和なので

$$P(10) = \frac{9}{90} + \frac{k}{90} = \frac{k+9}{90}.$$

(2) $2 \leq n \leq k$ では、1 回目に n 以外の k 以下の番号、2 回目に n を引く $k-1$ 個の順序付き対だけが該当する。よって

$$P(n) = \frac{k-1}{90} \quad (2 \leq n \leq k).$$

$k < n \leq 9$ では、1 回目に n を引く場合 9 個分と、2 回目に n を引く場合 k 個分があるので

$$P(n) = \frac{k+9}{90} \quad (k < n \leq 9).$$

(3) 1 回目の番号を j とする。 $j > k$ なら得点は j 、 $j \leq k$ なら 2 回目の番号の平均は $(55-j)/9$ である。したがって

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{10} \sum_{j=k+1}^{10} j + \frac{1}{10} \sum_{j=1}^k \frac{55-j}{9} \\
 &= \frac{-k^2 + 10k + 99}{18}.
 \end{aligned}$$

これは (1)(2) の分布から直接和を取った値とも一致する。

【総評】 難度 5、計算量 5。戻さずに 2 回目へ進む条件が 1 回目の番号 $\leq k$ のときだけである点を整理できれば、分布は 2 種類の確率に分かれる。 $n \leq k$ と $n > k$ で、1 回目に得点が確定するかどうかが違うため、ここを混同しやすい。期待値は分布から計算しても条件付き平均から計算してもよく、検算しやすい問題である。12 分程度で完答したい。

【第 3 問】

$\triangle OAB$ において、辺 AB 上に点 Q をとり、直線 OQ 上に点 P をとる。ただし、点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 $\triangle OAP$, $\triangle OBP$, $\triangle ABP$ の面積をそれぞれ a , b , c とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および a , b を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および a , b , c を用いて表せ。
- (3) 3 辺 OA , OB , AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし、3 直線 OA , OB , AB に接する円が存在するとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

P は OQ 上で Q の外側にあるので、面積比からまず $AQ:QB = a:b$ を読む。これにより Q の位置ベクトルが内分公式で出る。次に OP/OQ を λ とおくと、 $a+b = \lambda[OAB]$, $c = (\lambda-1)[OAB]$ となるため、 $[OAB] = a+b-c$ と分かる。(3) は 3 直線への距離が等しいことを、面積が辺の長さに比例することへ変換する。

【解答】

- (1) 直線 OQ を基準に見ると、 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ は同じ底辺 OP を持ち、高さはそれぞれ点 A , B から直線 OQ への距離である。点 Q は AB 上にあるので、これらの距離の比は $AQ:QB$ に等しい。したがって $AQ:QB = a:b$ である。よって内分公式より

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$$

である。

- (2) $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OQ}$ とおく。点 P は Q に関して O と反対側にあるので $\lambda > 1$ である。 $\triangle OAB$ の面積を T とする。 P を OQ 方向に λ 倍した位置に取ると、 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ の面積の和は $a+b = \lambda T$ である。一方、 P から直線 AB への距離は、 O から AB への距離の $\lambda-1$ 倍なので $c = (\lambda-1)T$ である。したがって $T = (a+b) - c = a+b-c$ であり、 $\lambda = \frac{a+b}{a+b-c}$ となる。ゆえに (1) より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a+b}{a+b-c} \cdot \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$$

である。

- (3) 点 P を中心とし、3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するなら、 P からこれら 3 直線への距離はすべて等しい。その共通の距離を r とする。

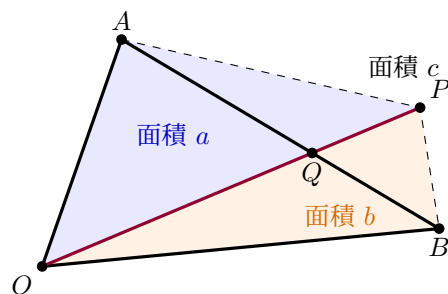
各三角形の面積は、対応する辺を底辺とすると

$$a = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot r, \quad b = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot r, \quad c = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r$$

である。 $OA = 3, OB = 5, AB = 6$ より $a:b:c = 3:5:6$ である。これを (2) に代入すると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5-6} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}$$

である。



P は半直線 OQ 上で Q の外側にある。

▶ 解法 2

【方針】

$Q = (1-t)A + tB$, $P = \lambda Q$ と媒介し, 各三角形の面積を行列式の倍率として表す。面積比から t と λ を直接決めるため, 内分公式を先に使わずに位置ベクトルが得られる。

【解答】

(1) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ とし,

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{u} + t\vec{v}, \quad \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OQ}$$

とおく。ただし $0 < t < 1, \lambda > 1$ である。三角形 OAB の面積を T とすると, 行列式の倍率から

$$a = \lambda t T, \quad b = \lambda(1-t)T.$$

よって $t = a/(a+b)$ であり,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{b\vec{u} + a\vec{v}}{a+b} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}.$$

(2) 上の 2 式から $a+b = \lambda T$ である。また, P は Q の外側にあるので

$$c = (\lambda - 1)T.$$

したがって $T = a + b - c$, $\lambda = (a+b)/(a+b-c)$ である。(1) へ代入して

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$$

を得る。

(3) P から 3 直線への共通距離を r とすると

$$a : b : c = OA : OB : AB = 3 : 5 : 6.$$

よって (2) に $a : b : c = 3 : 5 : 6$ を代入すれば

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5-6} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}$$

となる。

【総評】 難度 6, 計算量 5。図形を座標化しなくても, 面積比だけで位置ベクトルが決まる良問である。(1) では $AQ : QB$ の向きを逆にしないこと, (2) では c が P が Q を越えた分に対応するため $a+b-c$ が $\triangle OAB$ の面積になることがポイントである。(3) は接円の半径そのものを求める必要はなく, 面積が辺の長さに比例することだけ使えばよい。15 分程度で整理したい。

【第 4 問】

$a > 0$ に対して, $f(x) = a + \log x$ ($x > 0$), $g(x) = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$) とおく。2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が, ある点 P を共有し, その点で共通の接線 l を持つとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a の値, 点 P の座標, および接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。
- (3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【方針】

共通接線を持つ共有点では, 関数値と導関数の値が同時に一致する。共有点の x 座標を s とおき, $1/s = 1/(2\sqrt{s-1})$ から $s = 2$ を得る。(2) は差 $h(x) = f(x) - g(x)$ を作り, $u = \sqrt{x-1}$ と置いて $h'(x) \leq 0$ を明示する。(3) は f と g の x 軸との交点を確認し, 区間 $[2/e, 1]$, $[1, 2]$ に分けて面積を積分する。

【解答】

(1)

共有点の x 座標を s とする。 $g(x) = \sqrt{x-1}$ より $s > 1$ である。共通接線を持つので $f'(s) = g'(s)$ すなわち $\frac{1}{s} = \frac{1}{2\sqrt{s-1}}$ である。よって $s = 2\sqrt{s-1}$ であり, 両辺を 2 乗して $s^2 = 4s - 4$, $(s-2)^2 = 0$ を得る。したがって $s = 2$ で, $g(2) = 1$ だから共有点は $P = (2, 1)$ である。また $f(2) = 1$ より $a + \log 2 = 1$ なので $a = 1 - \log 2$ である。接線の傾きは $f'(2) = 1/2$ だから, 接線は $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$ すなわち $y = \frac{1}{2}x$ である。

(2) $a = 1 - \log 2$ として $h(x) = f(x) - g(x) = 1 - \log 2 + \log x - \sqrt{x-1}$ とおく。 $x > 1$ で微分すると $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ である。ここで $u = \sqrt{x-1}$ とおくと $x = u^2 + 1$ であり,

$$h'(x) = \frac{1}{u^2 + 1} - \frac{1}{2u} = \frac{2u - (u^2 + 1)}{2u(u^2 + 1)} = -\frac{(u-1)^2}{2u(u^2 + 1)} \leq 0$$

となる。等号は $u = 1$, すなわち $x = 2$ のときだけである。

したがって h は $x = 2$ を除いて減少し, $h(2) = 0$ であるから, $1 \leq x < 2$ では $h(x) > 0$, $x > 2$ では $h(x) < 0$ となる。よって 2 曲線の共有点は P 以外に存在しない。

(3) $f(x) = 0$ となるのは $1 - \log 2 + \log x = 0$ より $x = \frac{2}{e}$ である。また $g(x) = 0$ となるのは $x = 1$ である。(2) より $1 \leq x \leq 2$ では $f(x) \geq g(x)$ である。

したがって求める面積 S は

$$S = \int_{2/e}^1 f(x) dx + \int_1^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

である。これは

$$S = \int_{2/e}^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx$$

とまとめられる。

まず

$$\int f(x) dx = \int (1 - \log 2 + \log x) dx = x \log \frac{x}{2}$$

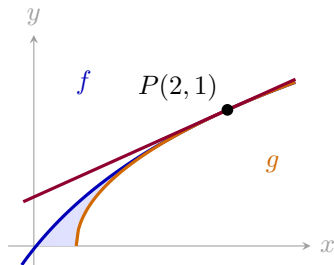
であるから

$$\int_{2/e}^2 f(x) dx = \left[x \log \frac{x}{2} \right]_{2/e}^2 = 0 - \frac{2}{e} \log \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

である。また

$$\int_1^2 \sqrt{x-1} dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

である。よって $S = \frac{2}{e} - \frac{2}{3}$ である。



青い部分が 2 曲線と x 軸で囲まれる領域。紫の直線は共通接線。

【総評】 難度 7, 計算量 6。共通接線条件を「値の一致」と「導関数の一致」に分解すれば, (1) はきれいに $s = 2$ へ落ちる。(2) では差の微分を $-(u-1)^2$ の形にする計算が核心で, 単にグラフの接し方を述べるだけでは不十分である。(3) は囲まれた領域の左端が $2/e$, 折れ目が 1, 接点が 2 であることを確認してから積分範囲を分ける。18 分前後で丁寧に処理したい。

【第 5 問】

いくつかの半径 3 の円を, 半径 2 の円 Q に外接し, かつ, 互いに交わらないように配置する。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし, 円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。このとき, $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

【方針】

円 Q の中心から半径 3 の円 R の中心までの距離は外接より 5 である。中心から引いた接線と半径は直交するので, 角 θ の半分を含む直角三角形で $\sin(\theta/2) = 3/5$ を得る。(3) では半径 3 の円の中心が半径 5 の円周上に並び, 隣り合う中心角が少なくとも θ 必要であることを使い, 5 個が不可能で 4 個が可能であることをそれぞれ示す。

【解答】

(1)

円 Q の中心を O , 円 R の中心を S とする。2 円は外接し, 半径がそれぞれ 2 と 3 なので $OS = 2 + 3 = 5$ である。点 O から円 R に引いた接線の接点を T とすると, $ST \perp OT$ であり, $ST = 3$ である。

2 本の接線は OS に関して対称なので, $\angle TOS = \theta/2$ である。直角三角形 OST より $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{ST}{OS} = \frac{3}{5}$, $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ である。したがって

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

である。

(2)

(1) より

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} > 0$$

である。 $0 < \theta < \pi$ だから $\theta < \frac{\pi}{2}$ である。

また $\cos \theta = 7/25 < 1/2 = \cos(\pi/3)$ であり, 余弦は $(0, \pi)$ で減少するので $\theta > \frac{\pi}{3}$ である。よって $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ が示された。

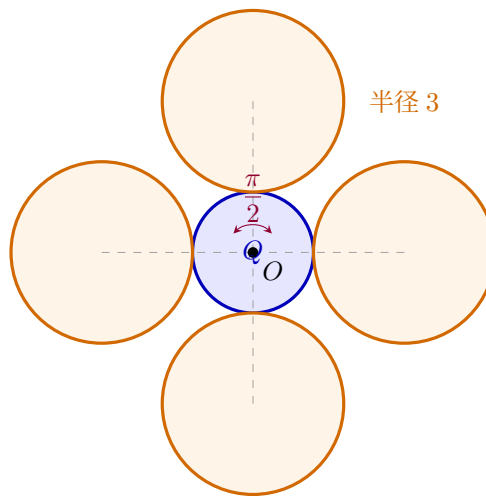
(3)

配置された半径 3 の円の中心は, すべて Q の中心 O から距離 5 の円周上にある。隣り合う 2 つの半径 3 の円が交わらないためには, それらの中心間距離が少なくとも 6 でなければならない。

中心角を φ とすると, 中心間距離は $2 \cdot 5 \sin(\varphi/2)$ である。したがって $10 \sin \frac{\varphi}{2} \geq 6$ すなわち $\sin \frac{\varphi}{2} \geq \frac{3}{5}$ である。 $0 < \varphi \leq \pi$ では正弦が増加する範囲で考えればよいので, 隣り合う中心角は少なくとも θ である。

ここで $\cos \theta = \frac{7}{25}$ であり, $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} > \frac{7}{25}$ である。余弦は $(0, \pi)$ で減少するから $\theta > \frac{2\pi}{5}$ である。もし 5 個配置できるなら, 中心角の合計が 2π である一周の中に, 少なくとも $5\theta > 2\pi$ が必要となり矛盾する。したがって 5 個以上は配置できない。

一方, 4 個なら中心を O のまわりに 90 度ずつ離して置けばよい。このとき隣り合う中心角は $\pi/2$ であり, (2) より $\theta < \pi/2$ だから中心間距離は 6 より大きく, 円どうしは交わらない。よって最大個数は 4 である。



半径 3 の円を 4 個置く実現例。各中心は O から距離 5 にある。

【総評】 難度 5, 計算量 4。接線と半径が直交する直角三角形から半角を読むのが出発点である。(2) は $\sin \theta$ だけでなく $\cos \theta$ も出しておくと, 角度範囲の比較が明確になる。(3) では $\theta > \pi/3$ だけでは 5 個を排除できないため, $\theta > 2\pi/5$ まで強める必要がある。最後に 4 個の実現例を述べて, 上限だけで終わらないようにする。12 分程度で取り切りたい標準的な円配置問題である。