

九州大学 2009 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 n を自然数とする. $x \geq 0$ において定義された関数

$$f_n(x) = \int_{e^{-x}}^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^n dt$$

について, 以下の問いに答えよ. なお, 必要ならば, 任意の整数 m について $\lim_{x \rightarrow \infty} x^m e^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい.

- (1) $f_n(x)$ の導関数 $\frac{df_n(x)}{dx}$ を求めよ.
- (2) 関数 $f_1(x)$ を求めよ.
- (3) $n > 1$ のときの $f_n(x)$ と $f_{n-1}(x)$ の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ を n を用いて表せ.

▶ 解法 1

【方針】

$u = \log(1/t)$ と変数変換して積分区間を 0 から x へ直す. (1) は上端微分, (2)(3) は部分積分で処理する. (4) は漸化式と与えられた指数関数の極限を用いる.

【解答】

まず, 後で使いやすい形に直しておく. $u = \log(1/t)$ とおくと $t = e^{-u}$, $dt = -e^{-u} du$ である. また $t = e^{-x}$ のとき $u = x$, $t = 1$ のとき $u = 0$ である. したがって

$$f_n(x) = \int_{e^{-x}}^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^n dt = \int_0^x u^n e^{-u} du$$

である.

(1)

上の表示から, 積分の上端が x であることを用いて $\frac{df_n(x)}{dx} = x^n e^{-x}$ である.

なお, 元の式から直接微分してもよい. 下端 e^{-x} の微分は $-e^{-x}$ なので

$$\frac{d}{dx} \int_{e^{-x}}^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^n dt = -(\log e^x)^n (-e^{-x}) = x^n e^{-x}$$

となる.

(2)

$n = 1$ のとき

$$f_1(x) = \int_0^x u e^{-u} du$$

である. 部分積分により

$$\int u e^{-u} du = -u e^{-u} - e^{-u}$$

だから

$$\begin{aligned} f_1(x) &= [-u e^{-u} - e^{-u}]_0^x \\ &= -(x+1)e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

である. よって $f_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$ である.

(3)

$n > 1$ とする.

$$f_n(x) = \int_0^x u^n e^{-u} du$$

で部分積分を行う. u^n を微分する側, e^{-u} を積分する側にとると

$$\begin{aligned} f_n(x) &= [-u^n e^{-u}]_0^x + n \int_0^x u^{n-1} e^{-u} du \\ &= -x^n e^{-x} + n f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

である. したがって $f_n(x) = n f_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$ である.

(4) $L_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ とおく. 問題文で与えられた極限より $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ である. したがって (3) から $L_n = n L_{n-1}$ を得る. また (2) より $L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \{1 - (x+1)e^{-x}\} = 1$ である. よって $L_n = n(n-1) \cdots 2 \cdot L_1 = n!$ となる. したがって $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = n!$ である.

▶ 解法 2 (有限和による一括表示)

【方針】

変数変換後の積分を繰り返し部分積分し, $f_n(x)$ を有限和で明示する. この 1 本の式を微分・比較・極限計算に使い, (1)~(4) をまとめて確認する.

【解答】

まず $u = \log(1/t)$ とおくと

$$f_n(x) = \int_0^x u^n e^{-u} du.$$

この積分を繰り返し部分積分すると

$$f_n(x) = n! \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$$

を得る. 実際, $n = 1$ では

$$f_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$$

で成立する. また $n-1$ で成立するとき, 1 回の部分積分から

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -x^n e^{-x} + n f_{n-1}(x) \\ &= n! \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

となるので, 帰納的に この有限和表示 が示される.

(1)

この有限和表示 を微分する. 有限和の隣り合う項が相殺して

$$\frac{df_n(x)}{dx} = x^n e^{-x}.$$

(2)

この有限和表示 に $n = 1$ を代入して

$$f_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

(3)

上の帰納計算そのものから

$$f_n(x) = n f_{n-1}(x) - x^n e^{-x} \quad (n > 1).$$

(4)

この有限和表示 の和は有限個であり, 各項について

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$$

である. したがって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = n!.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5, 目安時間 22 分. 最初に $u = \log(1/t)$ と変数変換し, 積分区間と指数関数を見通しよくする. 解法 1 は微分・部分積分・漸化式を設問順に処理し, 解法 2 は有限和 $f_n(x) = n! \{1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n x^k/k!\}$ を導いて全設問を一括確認する. 積分はすべて独立行に置き, 上下端や部分積分の境界項が潰れない組版にした.

【第 2 問】

a, b は実数 (ただし, $b \neq 0$) で, $A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}b & a+2b \end{pmatrix}$ とする. また, 数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次式により定める.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) 次の関係式を満たす実数 p, q, v, w を求めよ.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$$

ただし, $p \neq q, v < w$ とする.

(2) (1) で求めた v, w から, 行列 P を次のように定める.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & w \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) (2) で定めた P を用いて, 数列 $\{s_n\}, \{t_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次式より定める.

$$\begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ のとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n, \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ がともに収束するための a, b が満たすべき条件を求めよ.

【方針】

(1) は指定された形 $(1, r)^T$ を A に掛け, 第一成分を固有倍率として第二成分と比較する. $b \neq 0$ なので r の二次方程式に落ちる. (2) は P の列が (1) の 2 方向なので, $P^{-1}AP$ は対角行列になる. (3) では $(s_n, t_n)^T = P^{-1}(\alpha_n, \beta_n)^T$ に移すと, それぞれ公比 $a-b, a+3b$ の等比数列になる. 初期成分が 0 になる例外を含めて, 等比級数の収束条件を必要十分に書く.

【解答】

(1)

実数 r に対して

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \sqrt{3}br \\ \sqrt{3}b + (a+2b)r \end{pmatrix}$$

である. これが $\lambda(1, r)^T$ に等しいとすると, 第一成分から $\lambda = a + \sqrt{3}br$ である. 第二成分について $\sqrt{3}b + (a+2b)r = (a + \sqrt{3}br)r$ が必要である. 両辺の ar を消し, $b \neq 0$ で割ると $\sqrt{3} + 2r = \sqrt{3}r^2$ である. すなわち $\sqrt{3}r^2 - 2r - \sqrt{3} = 0$ であり, 解は $r = -\frac{1}{\sqrt{3}}, r = \sqrt{3}$ である. 条件 $v < w$ より $v = -\frac{1}{\sqrt{3}}, w = \sqrt{3}$ である.

対応する倍率は $p = a + \sqrt{3}bv = a - b, q = a + \sqrt{3}bw = a + 3b$ である. $b \neq 0$ より $p \neq q$ も満たされる. したがって $p = a - b, q = a + 3b$ である.

(2)

(1) で求めた v, w を用いると

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

である. P の第 1 列は A によって $p = a - b$ 倍され, 第 2 列は $q = a + 3b$ 倍される. したがって

$$AP = P \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+3b \end{pmatrix}$$

である. 両辺に左から P^{-1} を掛ければ

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+3b \end{pmatrix}$$

である.

(3)

まず初期値を s_1, t_1 で表す. P の逆行列は

$$P^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

である. したがって

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha - \sqrt{3}\beta}{4} \\ \frac{\alpha + \sqrt{3}\beta}{4} \end{pmatrix}$$

である.

また, (2) より

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

である. よって $s_{n+1} = (a-b)s_n$, $t_{n+1} = (a+3b)t_n$ となり, $s_n = (a-b)^{n-1}s_1$, $t_n = (a+3b)^{n-1}t_1$ である.

$\sum s_n$ は初項 $s_1 = 0$ なら恒等的に 0 であり, $s_1 \neq 0$ なら公比について $|a-b| < 1$ のとき, かつそのときに限って収束する. 同様に, $\sum t_n$ は $t_1 = 0$ または $|a+3b| < 1$ のとき, かつそのときに限って収束する.

ここで

$$s_1 = 0 \iff \beta = \sqrt{3}\alpha, \quad t_1 = 0 \iff \beta = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ のもとでこの 2 条件が同時に成り立つことはない. したがって, 求める必要十分条件は次の通りである.

$$\begin{cases} |a+3b| < 1, & \beta = \sqrt{3}\alpha \text{ のとき,} \\ |a-b| < 1, & \beta = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \text{ のとき,} \\ |a-b| < 1 \text{ かつ } |a+3b| < 1, & \text{上のいずれでもないとき.} \end{cases}$$

すなわち, 一般形では

$$(s_1 = 0 \text{ または } |a-b| < 1) \text{ かつ } (t_1 = 0 \text{ または } |a+3b| < 1)$$

である. 初期ベクトルが一方の固有方向に一致するときだけ, 使われない方の固有値には制約が付かない点に注意する.

【総評】 難度 7, 計算量 6, 目安時間 28 分. 固有ベクトルを列に並べた P で A を対角化すると, s_n, t_n は公比 $a-b, a+3b$ の幾何数列になる. 収束条件は初期成分が 0 かどうかで変わるため, $\beta = \sqrt{3}\alpha, \beta = -\alpha/\sqrt{3}$, その他の 3 場合を明示した. 「両固有値の絶対値が 1 未満」だけでは特殊な初期ベクトルを落とすので不十分である.

【第 3 問】

O を原点とする xyz 空間内の点 A, B, C をそれぞれ $A(-1, 2, 3), B(0, 1, 2), C(0, 1, 0)$ とし、2 点 A, B を通る直線を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P は直線 l 上を動き、点 Q は y 軸上を動くものとする。このとき、2 点 P と Q との距離の最小値を求めよ。
また、 P と Q との距離が最小となるとき P と Q をそれぞれ P_0, Q_0 とする。 P_0 と Q_0 の座標を求めよ。
- (2) P_0 との距離が s であるような直線 l 上の点の一つを S とする。点 S から三角形 P_0Q_0C を含む平面に下ろした垂線とその平面との交点を R とするとき、線分 SR の長さを求めよ。
- (3) y 軸上に長さ k の線分 DE があり、直線 l 上に長さ m の線分 FG がある。四面体 $DEFG$ の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は直線 l 上の点と y 軸上の点をそれぞれパラメータ表示し、距離の二乗を最小化する。最小時には 2 直線を結ぶベクトルが両方の方向に垂直になることも確認できる。(2) は三角形 P_0Q_0C の平面方程式を求め、直線 l 上で $P_0S = s$ だけ進んだ点からその平面への距離を計算する。(3) は 2 本の線分の方向、2 直線間の距離、方向ベクトルのなす角を使って四面体体積を求める。

【解答】

(1)
直線 l は A と B を通るので、方向ベクトルは $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, -1)$ である。したがって直線 l 上の点 P は、実数 u を用いて $P = A + u(1, -1, -1) = (-1 + u, 2 - u, 3 - u)$ と表せる。また Q は y 軸上にあるので $Q = (0, q, 0)$ とおく。

距離の二乗は

$$PQ^2 = (-1 + u)^2 + (2 - u - q)^2 + (3 - u)^2$$

である。まず u を固定すると、 q について最小になるのは $q = 2 - u$ のときである。このとき $PQ^2 = (-1 + u)^2 + (3 - u)^2$ となる。これを u について最小化すると $(-1 + u)^2 + (3 - u)^2 = 2(u - 2)^2 + 2$ であるから、最小は $u = 2$ のときである。よって $P_0 = (-1 + 2, 2 - 2, 3 - 2) = (1, 0, 1)$ 、 $Q_0 = (0, 0, 0)$ であり、最小距離は $\sqrt{2}$ である。したがって $P_0 = (1, 0, 1)$ 、 $Q_0 = (0, 0, 0)$ 、 $\min PQ = \sqrt{2}$ である。

(2)
三角形 P_0Q_0C を含む平面を求める。 Q_0 は原点で、 $\overrightarrow{Q_0P_0} = (1, 0, 1)$ 、 $\overrightarrow{Q_0C} = (0, 1, 0)$ である。この 2 つのベクトルを含む平面は $x - z = 0$ である。

直線 l の方向ベクトル $(1, -1, -1)$ の長さは $\sqrt{3}$ である。 $P_0S = s$ だから、 S は $S = P_0 \pm \frac{s}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$ のいずれかである。

平面 $x - z = 0$ までの距離は $\frac{|x - z|}{\sqrt{2}}$ である。 P_0 はこの平面上にあり、方向ベクトル $(1, -1, -1)$ では $x - z$ が $1 - (-1) = 2$

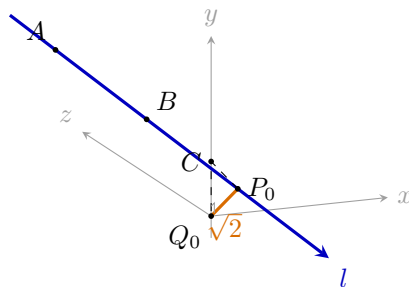
だけ変化する。したがって S では $|x - z| = \frac{2s}{\sqrt{3}}$ である。よって $SR = \frac{\frac{2s}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}s$ である。

(3)
 y 軸の方向を表す単位ベクトルを $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ とし、直線 l の方向を表す単位ベクトルを $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$ とする。2 直線の距離は (1) で求めた最小距離 $\sqrt{2}$ である。

2 つの線分の長さがそれぞれ k, m であるから、四面体の体積は $\frac{1}{6} \times k \times m \times (2 \text{直線の距離}) \times (2 \text{方向のなす角の正弦})$ で求められる。ここで $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ なので、なす角 θ について $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ である。したがって

$$V = \frac{1}{6} km \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} km \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} km$$

である。

【 y 軸と直線 l の位置関係 (模式図)】

▶ 別解 (3) の混合積

【方針】

(3) だけを混合積で処理する. y 軸, 直線 l , 共通垂線の 3 方向を使えば, 線分の始点がどこにあっても平行成分は混合積から消える.

【解答】

(1)

解法 1 と同様に距離の二乗を最小化して

$$P_0 = (1, 0, 1), \quad Q_0 = (0, 0, 0), \quad \min PQ = \sqrt{2}$$

を得る.

(2)

平面 P_0Q_0C は $x - z = 0$ である. 直線 l の単位方向ベクトルに沿って距離 s だけ進むと $|x - z| = 2s/\sqrt{3}$ だから

$$SR = \frac{\sqrt{6}}{3}s.$$

(3)

y 軸と直線 l の単位方向ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{u} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$$

とする. また (1) より, 両直線を結ぶ最短ベクトルとして

$$\mathbf{w} = \overrightarrow{Q_0P_0} = (1, 0, 1)$$

を取れる.

$\overrightarrow{DE} = k\mathbf{u}$, $\overrightarrow{FG} = m\mathbf{v}$ である. D から F へのベクトルは, $\mathbf{w}$ に両直線方向の成分を加えた形であるが, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に平行な成分は混合積に寄与しない. したがって四面体の体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} |(k\mathbf{u}) \times (m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| \\ &= \frac{km}{6} \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{km}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} km. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7, 計算量 6, 目安時間 28 分. (1) で距離の二乗を 2 変数で最小化し, $P_0 = (1, 0, 1)$, $Q_0 = O$, 最短距離 $\sqrt{2}$ を得る. (2) は平面 $x = z$ への距離, (3) は「2 方向の長さ $\times$ 直線間距離 $\times$ なす角の正弦」の体積公式で処理する. (3) には混合積による独立した別解も収録し, 空間内の位置関係は模式図で補った.

【第 4 問】

点 Q は次の規則で数直線上の負でない整数の上を正の方向へ動くものとする．ただし n は負でない整数とする．

- (a) 時刻 0 では点 Q は原点にある．
- (b) 点 Q が時刻 T で座標 $2n$ にあるとき、時刻 $T+1$ には確率 $\frac{1}{2}$ で座標 $2n+1$ へ移動し、確率 $\frac{1}{2}$ で座標 $2n+2$ へ移動する．
- (c) 点 Q が時刻 T で座標 $2n+1$ にあるとき、時刻 $T+1$ には確率 1 で座標 $2n+2$ へ移動する．

点 Q が時刻 T で座標 j にある確率を $P(T, j)$ と書くことにする．以下の問いに答えよ．

- (1) すべての自然数 j に対して $P(2, j)$ を求めよ．
- (2) T, j が自然数であるとき、 $P(T, j) = 0$ となる条件を T, j を用いて表せ．
- (3) T が自然数であるとき $P(T, 2n)$ を求めよ．

【方針】

偶数点にいるときだけ選択があり、偶数点 $2r$ から次の偶数点 $2r+2$ へは、1 回で進む短いブロックと、奇数点を経由して 2 回で進む長いブロックの 2 種類がある．(1)(2) は小さい時刻と到達可能範囲を確認する．(3) は座標 $2n$ までに偶数点間のブロックを n 個終えろと考え、全時刻 T にするには長いブロックが $T-n$ 個必要であることから組合せで数える．

【解答】

(1)

時刻 0 では Q は 0 にある．0 は偶数点なので、時刻 1 には 1 または 2 にそれぞれ確率 $1/2$ でいる．

時刻 1 で 1 にいる場合、1 は奇数点なので時刻 2 には必ず 2 に進む．時刻 1 で 2 にいる場合、2 は偶数点なので時刻 2 には 3 または 4 にそれぞれ確率 $1/2$ で進む．したがって

$$P(2, 2) = \frac{1}{2}, \quad P(2, 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(2, 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である．それ以外の自然数 j については到達できないので

$$P(2, 2) = \frac{1}{2}, \quad P(2, 3) = \frac{1}{4}, \quad P(2, 4) = \frac{1}{4}, \quad \text{その他は } 0$$

である．

(2)

1 回の移動による増加量は 1 または 2 なので、到達できるなら

$$T \leq j \leq 2T$$

が必要である．以下、この不等式を満たす j には実際に正の確率で到達できることを、 j の偶奇に分けて示す．

$j = 2n$ のとき、後述の「偶数点から次の偶数点まで」を 1 ブロックと考える． n 個のブロックの所要時間は、各ブロックが 1 回または 2 回なので、 n から $2n$ までのすべての整数値を取る．したがって

$$n \leq T \leq 2n$$

のとき、かつそのときに限って $P(T, 2n) > 0$ である．これは $T \leq 2n \leq 2T$ と同値である．

$j = 2n+1$ のとき、最後の 1 回は偶数点 $2n$ から $2n+1$ への移動でなければならない．よって

$$P(T, 2n+1) > 0$$

であることは、時刻 $T-1$ に $2n$ にいる確率が正であることと同値である．偶数の場合の結果から

$$n \leq T-1 \leq 2n.$$

これは

$$T \leq 2n+1 \leq 2T$$

と同値である．

以上より, 偶数・奇数のどちらでも

$$P(T, j) > 0 \iff T \leq j \leq 2T.$$

したがって

$$P(T, j) = 0 \iff j < T \text{ または } j > 2T.$$

(3)

偶数点 $2r$ から次の偶数点 $2r+2$ へ進む方法を 1 つのブロックとして見る. 方法は次の 2 種類である. $2r \rightarrow 2r+2$ と 1 回で進む場合, 確率は $1/2$ である. また $2r \rightarrow 2r+1 \rightarrow 2r+2$ と 2 回で進む場合も, 最初に奇数点へ進む確率が $1/2$, その後は確率 1 で進むので, 全体の確率は $1/2$ である.

座標 $2n$ に到達するには, この偶数点間ブロックをちょうど n 個完了する必要がある. n 個のうち, 2 回かかる長いブロックが r 個, 1 回で進む短いブロックが $n-r$ 個あるとすると, 全体の時刻は $2r + (n-r) = n+r$ である. これが T に等しいためには $r = T-n$ でなければならない. したがって $0 \leq T-n \leq n$, すなわち $n \leq T \leq 2n$ のときだけ可能である.

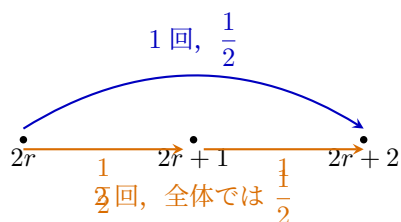
そのとき, 長いブロックを n 個中 $T-n$ 個選ぶ方法は

$$\frac{n!}{(T-n)!(2n-T)!}$$

通りである. 各ブロックは, 短い場合も長い場合も最初の選択の確率が $1/2$ なので, 指定した n 個の並びが生じる確率は $1/2^n$ である. よって

$$P(T, 2n) = \begin{cases} \frac{n!}{(T-n)!(2n-T)! 2^n}, & n \leq T \leq 2n, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

【偶数点間の 2 種類のブロック】



【総評】 難度 7, 計算量 5, 目安時間 27 分. 偶数点から次の偶数点までを, 所要時間 1 または 2・確率はいずれも $1/2$ のブロックとして捉える. (2) の十分性は増分 $1 \cdot 2$ を自由に並べるだけでは規則を保証できないため, 偶数座標と奇数座標に分けて厳密に証明した. (3) は長いブロックを選ぶ組合せを階乗表示し, 図でも 2 種類の遷移を確認できる.

【第 5 問】

$f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な関数とし, a, b を正の定数とする. このとき, $f(x)$ が $x \geq 0$ で

$$0 \leq f(x) \leq a + b \int_0^x f(t) dt$$

の関係を満たすものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 g を

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

と定めるとき,

$$\frac{d}{dx} \{g(x)e^{-bx}\} \leq ae^{-bx}$$

が成立することを示せ.

(2) $f(x) \leq ae^{bx}$ が成立することを示せ.

(3) $F(x)$ は x について連続な関数で, 任意の二つの実数 α, β に対して, 次の関係を満たすものとする.

$$|F(\alpha) - F(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$$

さらに, $x \geq 0$ で定義された二つの連続な関数 $y(x)$ と $z(x)$ は次の関係式を満たすものとする.

$$y(x) = \int_0^x F(y(t)) dt, \quad z(x) = \int_0^x F(z(t)) dt$$

このとき, $h(x) = |y(x) - z(x)|$ とおけば,

$$h(x) \leq \int_0^x h(t) dt$$

が成立することを示せ.

(4) $x \geq 0$ で $y(x) = z(x)$ であることを証明せよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1)(2) は g を f の 0 から x までの積分として定め, 仮定を $g'(x) \leq a + bg(x)$ に変える. e^{-bx} を掛けると左辺が積の微分になるので, 積分して g を評価し, 元の仮定へ戻して f を評価する. (3) は y と z の差を積分表示し, F の条件から絶対値を積分で押さえる. (4) は (2) と同じ不等式評価を h に適用し, $h \geq 0$ と合わせて $h = 0$ を示す.

【解答】

(1)

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

とおくと, f は連続なので $g'(x) = f(x)$ である. 仮定は

$$0 \leq f(x) \leq a + b \int_0^x f(t) dt$$

であるから, $g'(x) \leq a + bg(x)$ と書ける. したがって $g'(x) - bg(x) \leq a$ である.

ここで

$$\frac{d}{dx} \{g(x)e^{-bx}\} = g'(x)e^{-bx} - bg(x)e^{-bx} = \{g'(x) - bg(x)\}e^{-bx}$$

だから, $e^{-bx} > 0$ より $\frac{d}{dx} \{g(x)e^{-bx}\} \leq ae^{-bx}$ が成り立つ.

(2)

(1) の不等式を 0 から x まで積分する. $g(0) = 0$ であるから

$$g(x)e^{-bx} - g(0) \leq \int_0^x ae^{-bt} dt$$

すなわち $g(x)e^{-bx} \leq \frac{a}{b}(1 - e^{-bx})$ である. よって $g(x) \leq \frac{a}{b}(e^{bx} - 1)$ となる.

仮定 $f(x) \leq a + bg(x)$ に戻すと $f(x) \leq a + b \cdot \frac{a}{b}(e^{bx} - 1) = ae^{bx}$ である. したがって $f(x) \leq ae^{bx}$ が示された.

(3)

与えられた積分方程式から

$$y(x) - z(x) = \int_0^x \{F(y(t)) - F(z(t))\} dt$$

である. 両辺の絶対値を取ると, 三角不等式により

$$|y(x) - z(x)| \leq \int_0^x |F(y(t)) - F(z(t))| dt$$

である. さらに F の条件 $|F(\alpha) - F(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$ を $\alpha = y(t), \beta = z(t)$ に適用すると $|F(y(t)) - F(z(t))| \leq |y(t) - z(t)| = h(t)$ である. したがって

$$h(x) = |y(x) - z(x)| \leq \int_0^x h(t) dt$$

が成り立つ.

(4)

(3) より

$$0 \leq h(x) \leq \int_0^x h(t) dt$$

である. ここで (2) の証明は $a = 0, b = 1$ の場合にもそのまま成り立つ. 実際, $f = h, a = 0, b = 1$ として同じ議論を用いると $h(x) \leq 0 \cdot e^x = 0$ となる. 一方で $h(x) \geq 0$ だから $h(x) = 0$ である. よって $|y(x) - z(x)| = 0$ であり, すべての $x \geq 0$ で $y(x) = z(x)$ が成り立つ.

▶ 別解 ((4) の反復評価)

【方針】

(3) の不等式を自分自身へ繰り返し代入する. 有限区間での h の最大値を H と置くと, n 重積分から $h(x) \leq Hx^n/n!$ が得られ, $n \rightarrow \infty$ で 0 になる.

【解答】

(1)

$g(x)$ に積分因子 e^{-bx} を掛ける解法 1 の計算により

$$\frac{d}{dx}\{g(x)e^{-bx}\} \leq ae^{-bx}.$$

(2)

(1) を 0 から x まで積分して $g(x) \leq a(e^{bx} - 1)/b$ を得る. これを元の仮定へ戻すと

$$f(x) \leq ae^{bx}.$$

(3)

2 つの積分方程式の差を取り, F の条件を使えば

$$h(x) = |y(x) - z(x)| \leq \int_0^x h(t) dt.$$

(4)

任意に $X > 0$ を固定する. h は $[0, X]$ で連続だから, 最大値

$$H = \max_{0 \leq t \leq X} h(t)$$

を持つ. (3) より, $0 \leq x \leq X$ で

$$h(x) \leq \int_0^x h(t_1) dt_1.$$

右辺の h にも同じ不等式を代入し, これを n 回繰り返すと

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} h(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1 \\ &\leq \frac{Hx^n}{n!} \end{aligned}$$

を得る.

固定した x に対して $x^n/n! \rightarrow 0$ であるから, $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$0 \leq h(x) \leq 0.$$

よって $h(x) = 0$ であり, $[0, X]$ で $y(x) = z(x)$ が成り立つ. X は任意なので, すべての $x \geq 0$ で

$$y(x) = z(x)$$

である.

【総評】 難度 7, 計算量 5, 目安時間 28 分. (1)(2) は積分因子 e^{-bx} による不等式評価, (3) は絶対値と F のリプシッツ条件の適用である. (4) には, (2) を $a = 0, b = 1$ として使う解法と, 有限区間上の最大値から $h(x) \leq Hx^n/n!$ を得る反復評価の別解を収録した. 後者は一意性が生まれる仕組みを直接示している.