

九州大学 2010 年度 理系

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 3 問】

xy 平面上に曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ を描き、この曲線の第 1 象限内の部分を C_1 、第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。 C_1 上の点 $P_1 \left(a, \frac{1}{a^2} \right)$ から C_2 に向けて接線を引き、 C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き、 C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き、接点を Q_2 とする。以下同様に続けて、 C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q_1 の座標を求めよ。
- (2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。
- (3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の面積 S_n を求めよ。
- (4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

曲線 $y = 1/x^2$ の $x = u$ における接線をまず式で表し、その接線が反対側の枝上の点を通る条件を解く。 P_1 から Q_1 では接点の x 座標が $-2a$ になり、 Q_1 から P_2 では $4a$ になる。この倍率の規則を一般化して P_n の x 座標を $4^{n-1}a$ とし、三角形の面積は同じ形の計算を $4^{n-1}a$ に置き換えて等比級数にする。

【解答】

(1)

曲線 $y = 1/x^2$ の $x = u$ における接線を求める。導関数は $y' = -\frac{2}{x^3}$ であるから、接線の方程式は $y - \frac{1}{u^2} = -\frac{2}{u^3}(x - u)$ すなわち $y = -\frac{2}{u^3}x + \frac{3}{u^2}$ である。

この接線が $P_1(a, 1/a^2)$ を通るとすると $\frac{1}{a^2} = -\frac{2a}{u^3} + \frac{3}{u^2}$ である。 $v = u/a$ とおくと $1 = -\frac{2}{v^3} + \frac{3}{v^2}$ より $v^3 - 3v + 2 = 0$ である。因数分解して $(v-1)^2(v+2) = 0$ となる。 Q_1 は第 2 象限側の接点なので $u < 0$ であり、 $v = -2$ を選ぶ。したがって $u = -2a$ であり、 $Q_1\left(-2a, \frac{1}{4a^2}\right)$ である。

(2)

次に Q_1 から C_1 へ引いた接線の接点を $P_2 = (u, 1/u^2)$ とする。接線 $y = -\frac{2}{u^3}x + \frac{3}{u^2}$ が $Q_1(-2a, 1/(4a^2))$ を通るので $\frac{1}{4a^2} = -\frac{4a}{u^3} + \frac{3}{u^2}$ である。 $w = u/a$ とおくと $\frac{1}{4} = -\frac{4}{w^3} + \frac{3}{w^2}$ すなわち $w^3 - 12w - 16 = 0$ である。これは $(w-4)(w+2)^2 = 0$ と因数分解でき、第 1 象限側の接点なので $w = 4$ である。よって $P_2\left(4a, \frac{1}{16a^2}\right)$ である。

三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積は、

$$P_1 = \left(a, \frac{1}{a^2}\right), \quad Q_1 = \left(-2a, \frac{1}{4a^2}\right), \quad P_2 = \left(4a, \frac{1}{16a^2}\right)$$

より

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} -3a & -\frac{3}{4a^2} \\ 3a & -\frac{15}{16a^2} \end{array} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{45}{16a} + \frac{9}{4a} \right) \\ &= \frac{81}{32a} \end{aligned}$$

である。

(3)

上の計算から、 C_1 上の点 $(s, 1/s^2)$ から C_2 へ接線を引くと接点の x 座標は $-2s$ であり、そこから再び C_1 へ接線を引くと次の接点の x 座標は $4s$ である。したがって $P_n = \left(4^{n-1}a, \frac{1}{(4^{n-1}a)^2}\right)$ である。

(2) の面積公式は、 a を一般の s に置き換えると $\frac{81}{32s}$ である。ここで $s = 4^{n-1}a$ とすれば $S_n = \frac{81}{32 \cdot 4^{n-1}a}$ である。

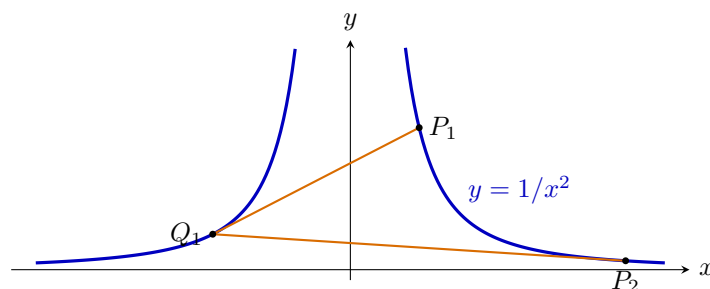
(4)

(3) より S_n は初項 $81/(32a)$ 、公比 $1/4$ の等比数列である。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{81}{32a} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{81}{32a} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{27}{8a}$$

である。

【2つの枝を交互に結ぶ接線】



接点の x 座標は $a \rightarrow -2a \rightarrow 4a$ と変化する。

▶ 解法 2

【方針】

接点の座標は接線条件から求める。一般項では、変換 $(x, y) \mapsto (4x, y/16)$ が曲線 $y = 1/x^2$ を保ち、三角形を次の三角形へ移すことを使う。面積倍率は変換の行列式から直ちに $1/4$ となる。

【解答】

(1)

$x = u$ における接線

$$y = -\frac{2}{u^3}x + \frac{3}{u^2}$$

が $P_1 = (a, 1/a^2)$ を通る条件を $v = u/a$ で整理すると

$$(v-1)^2(v+2) = 0$$

となる。第 2 象限の接点を選んで

$$Q_1 = \left(-2a, \frac{1}{4a^2}\right)$$

を得る。

(2)

同様に Q_1 から第 1 象限側への接点は

$$P_2 = \left(4a, \frac{1}{16a^2}\right)$$

である。3 点の座標から行列式で面積を求めると

$$S_1 = \frac{81}{32a}$$

となる。

(3)

平面の変換

$$T(x, y) = \left(4x, \frac{y}{16}\right)$$

を考える。 $y = 1/x^2$ 上の点は再び同じ曲線上へ移り、接線も接線へ移るから

$$T(P_n) = P_{n+1}, \quad T(Q_n) = Q_{n+1}$$

である。変換行列の行列式の絶対値は

$$4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

なので、三角形の面積も毎回 $1/4$ 倍になる。したがって

$$S_n = \frac{81}{32a} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

である。

(4)

等比級数を足して

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{81}{32a} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{27}{8a}$$

を得る。

【総評】 難度 7、計算量 6。接線の方程式を正確に立て、反対側の枝を選ぶために符号条件を使うことが第一の山である。 u/a で無次元化すると因数分解が見えやすく、 -2 倍、さらに 4 倍という規則に気づける。(2) の面積は行列式の符号より絶対値を取ることを、(3)(4) では面積が公比 $1/4$ になることを明記したい。目安時間は 20 分前後。

【第 4 問】

中心 $(0, a)$ 、半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角 t だけ回転したとき、点 P の座標を求めよ。
- (2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

【方針】

滑らずに転がるので、円が角 t だけ回転したとき中心は x 方向に弧長 at だけ進む。初めに最下点にあった点 P は、中心から見て $(-a \sin t, -a \cos t)$ だけずれるので媒介変数表示が得られる。面積は $x(t)$ が単調に増えることを使って

$$\int y \, dx$$

で計算し、曲線の長さは $\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$ を $2a \sin(t/2)$ に整理して積分する。

【解答】

(1)

円が x 軸上を滑らずに転がるので、角 t だけ回転したとき、中心は弧長 at だけ右に進む。したがって中心の座標は (at, a) である。

点 P は初め中心から見て $(0, -a)$ の位置にある。円が右向きに転がると、中心から P へのベクトルは $(-a \sin t, -a \cos t)$ となる。よって点 P の座標は $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ である。

(2)

(1) より $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ である。 $0 \leq t \leq 2\pi$ では $1 - \cos t \geq 0$ なので、面積は

$$\int y \, dx = \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} \, dt$$

で求められる。したがって

$$\begin{aligned}
 \text{面積} &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\
 &= a^2 \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right) \\
 &= a^2(2\pi + \pi)
 \end{aligned}$$

である。よって $3\pi a^2$ である。

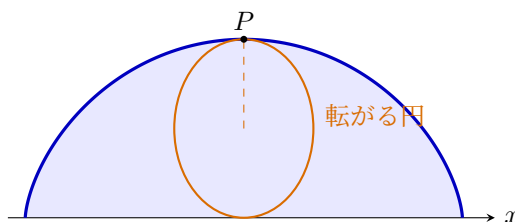
(3)

(1) より $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a \sin t$ である。したがって曲線の長さは

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1 - \cos t)\}^2 + (a \sin t)^2} dt \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\
 &= a \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt
 \end{aligned}$$

である。 $0 \leq t \leq 2\pi$ では $\sin(t/2) \geq 0$ であるから絶対値は不要である。よって $L = 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a$ である。

【1 回転でできるサイクロイド】



青い 1 アーチの下側を積分する。図では見やすさのため $a = 1$ 。

【総評】 難度 5、計算量 4。サイクロイドの標準計算であり、中心の移動量 at と中心から見た点 P の位置を分けて考えると式を作りやすい。面積では $dx/dt \geq 0$ を確認して

$$\int y dx$$

を使うこと、長さでは $\sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sin(t/2)$ とし、区間内で非負であることを添えるのがポイントである。目安時間は 12 分前後。

【第 5 問】

実数を成分とする 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える。平面上の点 $P(x, y)$ に対し、点 $Q(X, Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき、行列 A を求めよ。
- (2) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q は常に円 $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき、行列 A を求めよ。
- (3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q がある直線 L 全体の上を動くための a, b, c, d についての条件を求めよ。また、その条件が成り立っているとき、直線 L の方程式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

P が放物線 $y = x^2$ 上を動くので、 $P = (x, x^2)$ とおいて $Q = (X, Y) = (ax + bx^2, cx + dx^2)$ と表す。軌跡が指定された曲線上にある条件は x の恒等式として係数比較する。(1) では放物線上に「乗る」だけでなく「全体を動く」ために Y が全実数を動く条件 $c \neq 0$ を確認する。(3) では $Q = x(a, c) + x^2(b, d)$ が直線全体を動くため、二次項が残ると値域が半直線型になり全体にはならないことまで示す。

【解答】

(1)

P が $y = x^2$ 上を動くので、 $P = (x, x^2)$ とおく。このとき $X = ax + bx^2$ 、 $Y = cx + dx^2$ である。 Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 上にあるためには、すべての実数 x について $9(ax + bx^2) = 2(cx + dx^2)^2$ が成り立つ必要がある。展開すると $9ax + 9bx^2 = 2c^2x^2 + 4cdx^3 + 2d^2x^4$ である。係数を比較して $9a = 0$ 、 $9b = 2c^2$ 、 $4cd = 0$ 、 $2d^2 = 0$ を得る。したがって $a = 0$ 、 $d = 0$ 、 $b = \frac{2c^2}{9}$ である。

さらに、 Q が放物線 $9X = 2Y^2$ の全体を動くには、 $Y = cx$ がすべての実数値を取る必要がある。したがって $c \neq 0$ である。よって

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2c^2}{9} \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

である。このとき $Y = cx$ は全実数を動き、 $X = 2Y^2/9$ となるので、確かに放物線全体が得られる。

(2)

円の条件は $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ すなわち $X^2 + Y^2 - 2Y = 0$ である。 $X = ax + bx^2$ 、 $Y = cx + dx^2$ を代入すると $(ax + bx^2)^2 + (cx + dx^2)^2 - 2(cx + dx^2) = 0$ がすべての x で成り立つ。

x^4 の係数から $b^2 + d^2 = 0$ である。 b, d は実数なので $b = 0$ 、 $d = 0$ である。すると恒等式は $(a^2 + c^2)x^2 - 2cx = 0$ となる。 x の係数より $c = 0$ 、さらに x^2 の係数より $a = 0$ である。したがって

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。このとき $Q = (0, 0)$ であり、確かに円 $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ 上の点である。

(3)

$P = (x, x^2)$ に対して $Q = (X, Y) = x(a, c) + x^2(b, d)$ である。 $x = 0$ のとき $Q = (0, 0)$ だから、 Q が動く直線 L は原点を通る直線でなければならない。

まず $b = d = 0$ かつ $(a, c) \neq (0, 0)$ なら $Q = x(a, c)$ である。 x はすべての実数を動くので、 Q は原点を通り方向ベクトル (a, c) をもつ直線全体を動く。この直線は $cX - aY = 0$ で表される。

逆に、 Q がある直線全体を動くとする。するとすべての $Q = x(a, c) + x^2(b, d)$ は同じ一本の原点を通る直線上にあるので、 (a, c) と (b, d) は同じ方向を向くか、どちらかが零ベクトルでなければならない。もし $(b, d) \neq (0, 0)$ なら、その直線上の座標は $\alpha x + \beta x^2$ ($\beta \neq 0$) という二次式で表される。二次式の値域は下または上に限界をもつため、直線全体を動くことはできない。したがって $(b, d) = (0, 0)$ でなければならない。さらに $(a, c) = (0, 0)$ なら Q は原点だけにとどまり、直線全体を動かない。よって必要十分条件は $b = d = 0$, $(a, c) \neq (0, 0)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

$P = (t, t^2)$ と置き、像を $Q(t) = t(a, c) + t^2(b, d)$ と見る。(1)(2) は恒等式の係数比較で決める。(3) では 2 つの係数ベクトルが直線方向に並ぶことと、非定数二次式の値域が全実数にならないことを組み合わせる。

【解答】

(1)

$$Q(t) = (at + bt^2, ct + dt^2)$$

を $9X = 2Y^2$ へ代入し、 t の恒等式として係数比較すると

$$a = d = 0, \quad b = \frac{2c^2}{9}$$

を得る。放物線全体を動くには $Y = ct$ が全実数を動く必要があるから $c \neq 0$ である。よって

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2c^2}{9} \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

である。

(2)

$X^2 + Y^2 - 2Y = 0$ へ代入する。 t^4 の係数は $b^2 + d^2$ なので $b = d = 0$ である。残りは

$$(a^2 + c^2)t^2 - 2ct = 0$$

であり、係数比較から $a = c = 0$ を得る。したがって零行列だけが条件を満たす。

(3)

$Q(t)$ が原点を通る 1 本の直線上にあるなら、ベクトル

$$u = (a, c), \quad v = (b, d)$$

は同一直線方向にある。 $v \neq 0$ の場合、適当な方向ベクトル w と実数 α, β を用いて

$$Q(t) = (\alpha t + \beta t^2)w, \quad \beta \neq 0$$

と書ける。しかし非定数二次式 $\alpha t + \beta t^2$ の値域には上限または下限があり、直線全体を動けない。 $u = 0$, $v \neq 0$ の場合も t^2v は半直線しか動かない。

したがって必要なのは

$$v = 0, \quad u \neq 0$$

すなわち

$$b = d = 0, \quad (a, c) \neq (0, 0)$$

である。このとき $Q(t) = t(a, c)$ は実際に直線全体を動き、その方程式は

$$cX - aY = 0$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 7。係数比較自体は標準的だが、「曲線上にある」と「曲線全体を動く」の違いが難所である。(1) では $c = 0$ を許すと一点だけになってしまうため $c \neq 0$ が必要であり、(3) では二次式の値域が全実数にならないことを説明する必要がある。目安時間は 22 分前後で、必要条件だけで終わらず、得た行列が本当に条件を満たすことまで確認したい。