

九州大学 2011 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$a > 0, b > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) 初項
- $a_1 = a$
- と漸化式

$$a_{n+1} = \alpha a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、

$$x_n = \log_{10} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を n, α, a を用いて表せ。

- (2) 初項
- $b_1 = b$
- と漸化式

$$b_{n+1} = \beta b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義された数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、

$$y_n = \log_{10} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{y_n\}$ の一般項を n, β, b を用いて表せ。

- (3)
- $a = b = 1$
- のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = 0$$

を証明せよ。

【方針】

(1) は等比数列をそのまま対数に移す。(2) は $b_{n+1} = \beta b_n^2$ の両辺の常用対数を取り、 $y_{n+1} = 2y_n + \log_{10} \beta$ という一次漸化式に直す。定数項を含む等比和を丁寧に計算する。(3) では $a = b = 1$ によって初期対数が 0 になり、分子は n に比例、分母は 2^n に比例して増えることを示す。

【解答】

(1)

漸化式 $a_{n+1} = \alpha a_n$ より、数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公比 α の等比数列である。したがって $a_n = a\alpha^{n-1}$ である。常用対数を取ると

$$x_n = \log_{10} a_n = \log_{10}(a\alpha^{n-1}) = \log_{10} a + (n-1)\log_{10} \alpha$$

である。

(2) $y_n = \log_{10} b_n$ とおく。漸化式 $b_{n+1} = \beta b_n^2$ の両辺の常用対数を取ると $y_{n+1} = \log_{10} \beta + 2\log_{10} b_n = 2y_n + \log_{10} \beta$ である。また $y_1 = \log_{10} b$ である。

この漸化式を繰り返すと

$$\begin{aligned} y_n &= 2^{n-1}y_1 + (1 + 2 + \dots + 2^{n-2})\log_{10} \beta \\ &= 2^{n-1}\log_{10} b + (2^{n-1} - 1)\log_{10} \beta \end{aligned}$$

である。よって $y_n = 2^{n-1}\log_{10} b + (2^{n-1} - 1)\log_{10} \beta$ である。

(3) $a = b = 1$ のとき、 $\log_{10} a = \log_{10} b = 0$ である。(1)(2) の結果より $x_{n+1} = n\log_{10} \alpha$ であり、 $y_{n+1} = (2^n - 1)\log_{10} \beta$ である。 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ より、 $\log_{10} \alpha$ と $\log_{10} \beta$ はどちらも負であり、特に $\log_{10} \beta \neq 0$ である。

したがって

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{n}{2^n - 1} \cdot \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta}$$

である。ここで、二項定理から $n \geq 2$ に対して

$$2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

である。したがって

$$0 < \frac{n}{2^n - 1} \leq \frac{n}{n + \frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0.$$

よって定数倍しても極限は 0 であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = 0$$

が示された。

【総評】 対数を取ることで、積や 2 乗の漸化式を一次的な漸化式へ変える問題である。(2) では $2^{n-1} - 1$ という等比和の係数を落としやすい。(3) は符号ではなく増加の速さの比較であり、 n と 2^n の差を明示すれば十分である。目安時間は 12 分程度。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 原点のまわりの角 θ の回転移動を表す行列を R_θ とする。回転 R_θ によって点 $(2, 1)$ に移されるもとの点 (a, b) を求めよ。
- (2) 原点を通り、傾き $\tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の直線を l とする。
また、点 $P(x, y)$ を直線 l に関して対称移動した点を $P'(x', y')$ とする。このとき、 x' と y' を x, y および θ を用いて表し、この移動を表す行列 A_θ を求めよ。
- (3) x 軸に関する対称移動を表す行列を B とする。
このとき、 $R_\theta B R_\theta^{-1} = A_\theta$ となることを示せ。
- (4) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ とする。
2 つの行列の積 $A_\alpha A_\beta$ はある角の回転移動を表すことを示せ。また 3 つの行列の積 $A_\alpha A_\beta A_\gamma$ によって表される移動は決して回転移動を表さないことを示せ。

【方針】

(1) は回転後の点から角 $-\theta$ だけ戻す。(2) は直線方向の単位ベクトルと垂直方向の単位ベクトルに分解し、直線に関する対称移動で垂直成分だけ符号が変わることを使う。(3) は x 軸対称をいったん行い、それを角 θ だけ回転した座標系に移す計算として行列積を確認する。(4) は 2 つの反射の積が回転行列になることを成分計算で示し、3 つの反射の積は再び反射型の行列になり、回転行列の形とは一致しないことを成分比較で示す。

【解答】

(1)

角 θ の回転によって (a, b) が $(2, 1)$ に移されるので、 (a, b) は $(2, 1)$ を角 $-\theta$ だけ回転した点である。したがって

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。よって $a = 2 \cos \theta + \sin \theta$, $b = -2 \sin \theta + \cos \theta$ である。

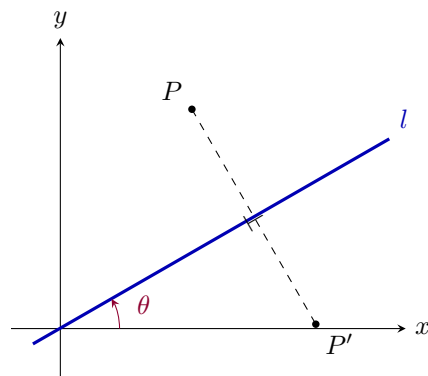
(2)

直線 l の方向の単位ベクトルを $\vec{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ とし、それに垂直な単位ベクトルを $\vec{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ とする。点 $P(x, y)$ の位置ベクトルは $\vec{p} = (x, y)$ である。 $\vec{p}$ を $\vec{e}$ 方向と $\vec{n}$ 方向に分けると $\vec{p} = (\vec{p} \cdot \vec{e})\vec{e} + (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n}$ である。直線 l に関する対称移動では、 $\vec{e}$ 方向成分はそのまま、 $\vec{n}$ 方向成分だけ符号が変わる。したがって $\vec{p}' = (\vec{p} \cdot \vec{e})\vec{e} - (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n}$ である。

これを成分で計算すると $x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta$ であり、 $y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta$ である。よってこの移動を表す行列は

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

である。



直線 l 方向の成分を保ち、垂直成分だけ符号を反転する。

(3) x 軸に関する対称移動を表す行列は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。また

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$R_\theta B R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。これを計算すると

$$R_\theta B R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = A_\theta$$

となる。

(4)

(2) の結果を用いて計算する。加法定理により

$$A_\alpha A_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

である。これは角 $2(\alpha - \beta)$ の回転移動を表す行列である。

次に、これに A_γ を掛けると

$$A_\alpha A_\beta A_\gamma = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta + \gamma) & \sin 2(\alpha - \beta + \gamma) \\ \sin 2(\alpha - \beta + \gamma) & -\cos 2(\alpha - \beta + \gamma) \end{pmatrix}$$

となる。

これがある角 ϕ の回転移動を表すと仮定すると

$$\begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta + \gamma) & \sin 2(\alpha - \beta + \gamma) \\ \sin 2(\alpha - \beta + \gamma) & -\cos 2(\alpha - \beta + \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

である。左上成分と右下成分を比べると $\cos \phi = -\cos \phi$ となるので $\cos \phi = 0$ である。一方、右上成分と左下成分を比べると $-\sin \phi = \sin \phi$ となるので $\sin \phi = 0$ である。これは $\sin \phi$ と $\cos \phi$ が同時に 0 になることを意味し、不可能である。したがって $A_\alpha A_\beta A_\gamma$ は決して回転移動を表さない。

なお、幾何的には、 A_θ は原点を通る直線に関する対称移動である。2つの対称移動を続けると、2つの対称軸のなす角の2倍だけ回転する移動になる。一方、3つの対称移動は「回転の後に対称移動」を行う形になるので、向きを反転する移動であり、向きを保つ回転移動にはならない。これは上の行列計算で得た反射型の行列と一致している。

【総評】 回転行列と対称移動行列を三角関数で扱う問題である。(2) では直線方向と垂直方向に分解する発想があると、公式を暗記せずに A_θ を導ける。(4) は計算が長く見えるが、2つの反射は回転、3つの反射は反射型という構造を意識すると見通しがよい。目安時間は 30 分程度。

【第 3 問】

座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) x 座標が小さい方の焦点 F を極とし、 F から x 軸の正の方向へ向かう半直線を始線とする極座標 (r, θ) で表された楕円の極方程式 $r = f(\theta)$ を求めよ。
- (2) 座標平面上の原点 $O(0, 0)$ と楕円上の 2 点 P_1, P_2 について、線分 OP_1 と線分 OP_2 とが互いに直交する位置にあるとする。線分 OP_1 および OP_2 の長さをそれぞれ r_1, r_2 とするとき、 $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$ の値は定数となることを示せ。

【方針】

(1) は左焦点を極にした極座標に直し、楕円の「2 焦点からの距離の和が $2a$ 」という性質を使う。右焦点までの距離を $2a - r$ として 2 乗し、 $c^2 = a^2 - b^2$ を用いて整理する。(2) は原点から見た方向角を ϕ とし、楕円上の点までの距離 r を方程式に代入して $1/r^2$ を方向だけで表す。直交する方向は $\phi + \pi/2$ なので、足すと三角関数が消える。

【解答】

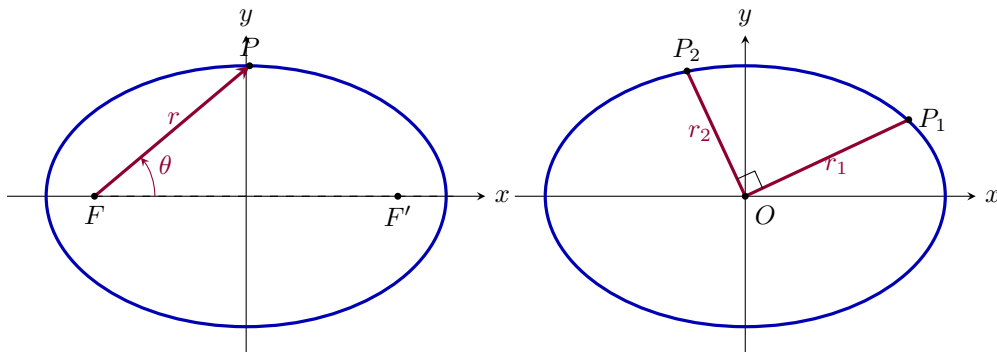
(1) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ とおく。楕円の焦点は $(\pm c, 0)$ であり、 x 座標が小さい方の焦点は $F = (-c, 0)$ である。

この F を極とし、 x 軸正方向を始線とする極座標で点を表すと $x = -c + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ である。また、右の焦点を $F' = (c, 0)$ とする。楕円上の点では $PF + PF' = 2a$ であり、 $PF = r$ だから $PF' = 2a - r$ である。

一方、座標から

$$PF'^2 = (-c + r \cos \theta - c)^2 + (r \sin \theta)^2 = (r \cos \theta - 2c)^2 + r^2 \sin^2 \theta$$

である。したがって $(2a - r)^2 = r^2 - 4cr \cos \theta + 4c^2$ である。展開して r^2 を消すと $4a^2 - 4ar = -4cr \cos \theta + 4c^2$ であり、4 で割って整理すると $r(a - c \cos \theta) = a^2 - c^2$ である。 $a^2 - c^2 = b^2$ だから $r = f(\theta) = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$ である。



左：焦点 F を極とする表示。右：中心 O から互いに直交する 2 方向。

(2)

原点から楕円上の点へ向かう方向角を ϕ とし、その点までの距離を r とする。この点の座標は $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ である。楕円の方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入すると $\frac{r^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \phi}{b^2} = 1$ である。よって $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}$ である。

2 本の線分 OP_1, OP_2 が直交するなら、対応する方向角は ϕ と $\phi + \pi/2$ としてよい。したがって $\frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}$ であり、

$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{\cos^2(\phi + \pi/2)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi + \pi/2)}{b^2} = \frac{\sin^2 \phi}{a^2} + \frac{\cos^2 \phi}{b^2}$$

である。これらを足すと

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

である。これは P_1, P_2 の位置によらない定数である。

【総評】 楕円の焦点性質と、原点から見た方向表示を使う問題である。(1) では焦点を極に取るため、通常を中心極座標と混同しないことが重要である。 $PF' = 2a - r$ として 2 乗し、 $a^2 - c^2 = b^2$ を使うと極方程式が短く出る。(2) は方向角を置けば、直交する方向で $\sin^2$ と $\cos^2$ が入れ替わるだけで定数性が見える。目安時間は 20 分程度。

【第 4 問】

関数 $f(x) = -x \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \pi$ の範囲で、方程式 $f''(x) = 0$ がただ 1 つの解 $x = a$ をもつことを示せ。
- (2) 上の (1) で存在が示された a に対して、 $a < x < \pi$ の範囲で、方程式 $f'(x) = -1$ がただ 1 つの解 $x = b$ をもつことを示し、その値 b を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(b, f(b))$ における法線 m の方程式を求めよ。
- (3) 上の (2) で求めた法線 m と曲線 $y = f(x)$ および y 軸とで囲まれた図形を、 x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

【方針】

まず $f'(x), f''(x)$ を求める。(1) は $0 < x < \pi/2$ で $f''(x) = 0$ を $x \tan x = 2$ に直し、単調増加と値域で一意性を示す。 $\pi/2 < x < \pi$ では各項の符号から $f''(x) > 0$ とわかる。(2) は $a < x < \pi$ で $f'' > 0$ だから f' が単調増加し、 $f'(\pi/2) = -1$ から解が $b = \pi/2$ とわかる。(3) は法線と曲線がともに x 軸の下側にあることを確認し、外半径 $\pi - x$ 、内半径 $x \sin x$ の差で体積を積分する。

【解答】

(1) $f(x) = -x \sin x$ であるから $f'(x) = -\sin x - x \cos x$ であり、さらに $f''(x) = -2 \cos x + x \sin x$ である。

まず $0 < x < \pi/2$ で考える。この範囲では $\cos x > 0$ なので、 $f''(x) = 0$ は $-2 \cos x + x \sin x = 0$ すなわち $x \tan x = 2$ と同値である。ここで $x \tan x$ は $0 < x < \pi/2$ で単調増加する。実際、微分すると $\tan x + x \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ である。また $x \rightarrow 0+$ で $x \tan x \rightarrow 0$ 、 $x \rightarrow \pi/2-$ で $x \tan x \rightarrow \infty$ である。したがって $x \tan x = 2$ はこの範囲にただ 1 つの解をもつ。

次に $\pi/2 < x < \pi$ では $\cos x < 0$ 、 $\sin x > 0$ であるから $-2 \cos x + x \sin x > 0$ である。よってこの範囲には $f''(x) = 0$ の解はない。したがって $0 < x < \pi$ において、方程式 $f''(x) = 0$ はただ 1 つの解 $x = a$ をもつ。

(2)

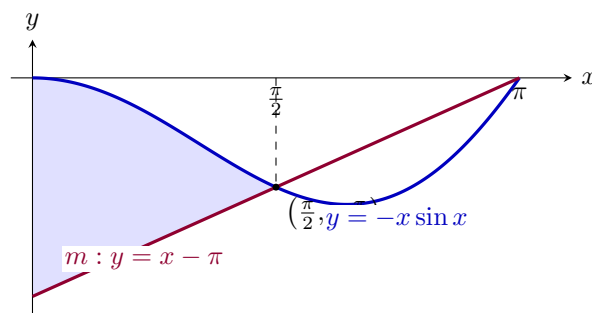
(1) で得た a より右側では $f''(x) > 0$ である。したがって $a < x < \pi$ で $f'(x)$ は単調増加する。

ここで $f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -1$ である。さらに $a < \pi/2$ であり、 f' は (a, π) で単調増加するので、方程式 $f'(x) = -1$ の解は $b = \frac{\pi}{2}$ のただ 1 つである。

この点での曲線上の点は

$$\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

である。接線の傾きは $f'(b) = -1$ なので、法線の傾きは 1 である。したがって法線 m は $y + \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2}$ すなわち $y = x - \pi$ である。



回転する領域は $0 \leq x \leq \pi/2$ で曲線と法線の間にある。

(3)

法線 m は $y = x - \pi$ であり、 $0 \leq x \leq \pi/2$ では $x - \pi < 0$ である。また曲線は $y = -x \sin x \leq 0$ である。 $x = \pi/2$ では両者は一致し、 $0 \leq x < \pi/2$ では法線の方が下にある。

したがって x 軸のまわりに回転すると、外半径は $\pi - x$ 、内半径は $x \sin x$ である。よって体積は

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \{(\pi - x)^2 - x^2 \sin^2 x\} dx$$

である。

まず

$$\int_0^{\pi/2} (\pi - x)^2 dx = \left[-\frac{(\pi - x)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{7\pi^3}{24}$$

である。また $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ を用いると

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx$$

である。部分積分により

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx = -\frac{\pi}{4}$$

なので

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} V &= \pi \left\{ \frac{7\pi^3}{24} - \left(\frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{13\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \frac{\pi^2(13\pi^2 - 6)}{48}. \end{aligned}$$

【総評】 微分による一意性の証明と、回転体の体積計算を両方求める重めの問題である。(1) では $x \tan x = 2$ の単調性、(2) では $f'' > 0$ による f' の単調性を明示することが重要である。(3) は上下関係ではなく、 x 軸からの距離として外半径・内半径を判断する必要がある。目安時間は 30 分程度。

【第 5 問】

50 円と 100 円の硬貨が 3 枚ずつの計 6 枚と、さいころが 1 個ある。これらの硬貨 6 枚とさいころ 1 個を同時に投げて、表が出た硬貨の合計額にさいころの目の数 n から 2 を引いた数の絶対値 $|n - 2|$ をかけ合わせた賞金をもらえるものとする。たとえば、硬貨 6 枚すべてが表となり、さいころの目が 6 となった場合、表が出た硬貨の合計額 450 円を 4 倍した 1800 円を賞金としてもらえる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 賞金を全くもらえない確率を求めよ。
- (2) もらえる賞金が 500 円以上となる確率を求めよ。
- (3) もらえる賞金の期待値を求めよ。

【方針】

表の硬貨の合計額 S と、さいころによる倍率 $|n - 2|$ は独立に扱える。(1) は賞金 0 円となる原因が $S = 0$ または倍率 0、つまり $n = 2$ であることを包除で数える。(2) は S の分布を、50 円硬貨の表の枚数と 100 円硬貨の表の枚数で作る、倍率 2, 3, 4 のときだけ 500 円以上が可能であることを使う。(3) は独立性により、期待値を $E(S)E(|n - 2|)$ として計算する。

【解答】

(1)

表が出た硬貨の合計額を S とする。賞金は $S|n - 2|$ である。これが 0 になるのは $S = 0$ または $|n - 2| = 0$ のときである。 $S = 0$ となるのは 6 枚の硬貨がすべて裏のときなので、その確率は $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ である。また $|n - 2| = 0$ はさいころの目が 2 のときであり、その確率は $\frac{1}{6}$ である。硬貨とさいころは独立なので、両方が同時に起こる確率は $\frac{1}{64} \cdot \frac{1}{6}$ である。したがって包除原理により、求める確率は $\frac{1}{64} + \frac{1}{6} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{6} = \frac{23}{128}$ である。

(2)

50 円硬貨の表の枚数を i 、100 円硬貨の表の枚数を j とすると $S = 50i + 100j$ であり、 $0 \leq i, j \leq 3$ である。このようになる硬貨の出方は ${}_3C_i {}_3C_j$ 通りである。分布をまとめると、 S は 50 円刻みで 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 を取り、それぞれの場合の数は 1, 3, 6, 10, 12, 12, 10, 6, 3, 1 である。

さいころの倍率 $|n-2|$ は、 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して $1, 0, 1, 2, 3, 4$ である。倍率 0 では賞金は 0、倍率 1 では最大でも 450 円なので、500 円以上にはならない。したがって考えるのは倍率 2, 3, 4 のときだけである。

倍率 2 のときは $2S \geq 500$ より $S \geq 250$ が必要で、この場合の硬貨の出方は $12 + 10 + 6 + 3 + 1 = 32$ 通りである。倍率 3 のときは $3S \geq 500$ なので、50 円刻みで考えて $S \geq 200$ が必要であり、場合の数は $12 + 12 + 10 + 6 + 3 + 1 = 44$ 通りである。倍率 4 のときは $4S \geq 500$ なので $S \geq 150$ が必要で、場合の数は $10 + 12 + 12 + 10 + 6 + 3 + 1 = 54$ 通りである。

さいころの各目は 1 通りずつで、全事象は $64 \cdot 6 = 384$ 通りである。よって有利な場合の数は $32 + 44 + 54 = 130$ であり、求める確率は $\frac{130}{384} = \frac{65}{192}$ である。

(3)

硬貨の合計額 S と倍率 $|n-2|$ は独立である。したがって賞金の期待値は $E(S|n-2) = E(S)E(|n-2|)$ である。

まず、各硬貨が表になる確率は $1/2$ であるから $E(S) = 3 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = 75 + 150 = 225$ である。また、さいころの倍率の期待値は

$$E(|n-2|) = \frac{|1-2| + |2-2| + |3-2| + |4-2| + |5-2| + |6-2|}{6} = \frac{1+0+1+2+3+4}{6} = \frac{11}{6}$$

である。よって賞金の期待値は $225 \cdot \frac{11}{6} = \frac{825}{2}$ 円である。

【総評】 硬貨の合計額とさいころの倍率を分けて考える確率問題である。(2) は分布表を作ると安全で、倍率 2, 3, 4 のしきい値がそれぞれ 250, 200, 150 円になることを 50 円刻みに合わせて判断する。(3) は独立性を使えば分布表を使わずに期待値が出る。目安時間は 18 分程度。