

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 2011 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $P(t, \sqrt{t})$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、 $t > 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H の座標を t を用いて表せ。
- (2) $x \geq 1$ の範囲において、曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、 S_1 を t を用いて表せ。
- (3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ であるとき、 t の値を求めよ。

第 2 問

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。
- (2) $x \geq 3$ のとき、不等式 $x^3e^{-x} \leq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに、極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x}$ を求めよ。
- (3) k を定数とする。 $y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を、 a と k を用いて表せ。

第 3 問

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

をみたしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ とするとき、

$$a_{n+k} = a_n \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ。

第 4 問

空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, 2, 0)$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点 O , A , B , C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。
- (2) 3 点 A , B , C を通る平面に点 D から垂線を引き、交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

第 5 問

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作： 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、 i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を n 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3) $n = 2$ のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4) $n = 3$ のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)