

九州大学 2011 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $P(t, \sqrt{t})$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、 $t > 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H の座標を t を用いて表せ。
- (2) $x \geq 1$ の範囲において、曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、 S_1 を t を用いて表せ。
- (3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ であるとき、 t の値を求めよ。

【方針】

直線 $y = x$ への垂線は傾き -1 なので、点 $P(t, \sqrt{t})$ を通る直線と $y = x$ を連立して H を求める。面積 S_1 は、 $x = 1$ から H の x 座標までは直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{x}$ の差、そこから $x = t$ までは線分 PH と曲線の差を積分する。最後は $r = \sqrt{t}$ と置いて文系型の式に戻し、 $r > 1$ の根を選ぶ。

【解答】

(1)

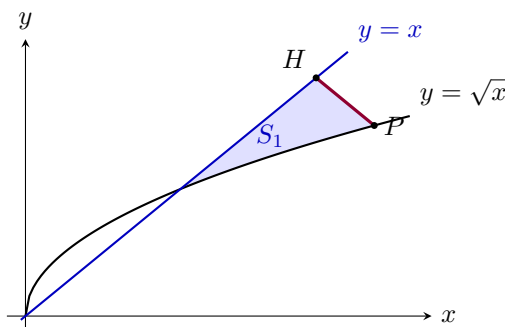
直線 $y = x$ の傾きは 1 であるから、これに垂直な直線 PH の傾きは -1 である。点 $P(t, \sqrt{t})$ を通るので

$$y - \sqrt{t} = -(x - t), \quad \text{すなわち} \quad y = t + \sqrt{t} - x$$

である。これと $y = x$ を連立すると

$$H \left(\frac{t + \sqrt{t}}{2}, \frac{t + \sqrt{t}}{2} \right)$$

を得る。



$t > 1$ の代表的な配置。ここでは $1 < H_x < t$ となる。

(2)

$$r = \sqrt{t}, \quad u = \frac{t + \sqrt{t}}{2} = \frac{r^2 + r}{2}$$

とおく。 $t > 1$ すなわち $r > 1$ なので

$$u - 1 = \frac{(r-1)(r+2)}{2} > 0, \quad t - u = \frac{r(r-1)}{2} > 0$$

であり、 $1 < u < t$ が確かめられる。したがって、 $1 \leq x \leq u$ では上側が直線 $y = x$ 、 $u \leq x \leq t$ では上側が線分 PH である。よって

$$S_1 = \int_1^u (x - \sqrt{x}) dx + \int_u^t (r^2 + r - x - \sqrt{x}) dx.$$

同じ種類の項をまとめると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^u x \, dx + \int_u^{r^2} (r^2 + r - x) \, dx - \int_1^{r^2} \sqrt{x} \, dx \\ &= \left\{ \frac{r^2(r+1)^2}{8} - \frac{1}{2} \right\} + \frac{r^2(r^2 + 2r - 3)}{8} - \frac{2}{3}(r^3 - 1) \\ &= \frac{(r-1)^2(3r^2 + 4r + 2)}{12}. \end{aligned}$$

$r = \sqrt{t}$ に戻せば

$$S_1 = \frac{3t^2 - 2t\sqrt{t} - 3t + 2}{12}.$$

(3)

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ は $x = 0, 1$ で交わり、 $0 \leq x \leq 1$ では $\sqrt{x} \geq x$ である。よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x) \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ は

$$(r-1)^2(3r^2 + 4r + 2) = 2$$

と同値である。左辺を展開して整理すると

$$r^2(3r^2 - 2r - 3) = 0.$$

$r > 1$ なので

$$r = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}.$$

したがって

$$t = r^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3} \right)^2 = \frac{11 + 2\sqrt{10}}{9}.$$

【総評】 文系第1問と対応する面積問題だが、 $y = \sqrt{x}$ は $x > 1$ で直線 $y = x$ より下にあるため、上下関係を逆にしないことが重要である。まず $1 < H_x < t$ を式で確認し、境界が変わる $x = H_x$ で積分を分ける。 $r = \sqrt{t}$ と置けば、面積式と最後の4次式が文系問題と同じ形になり、見通しよく整理できる。目安時間は20分程度。

【第2問】

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。
- (2) $x \geq 3$ のとき、不等式 $x^3 e^{-x} \leq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに、極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ。
- (3) k を定数とする。 $y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる3点で交わるための必要十分条件を、 a と k を用いて表せ。

【方針】

(1) は微分して $f'(x) = (a^2 - x^2)e^{-x}$ を出し、 $-a, a$ を境に増減を読む。(2) は $x^3 e^{-x}$ の単調性で最大値を示し、極限は e^x が多項式より速く大きくなることを具体的不等式で押さえる。(3) は交点条件を $f(x) = k$ に変換し、 f の極小値・極大値・右端の極限0を使って、3つの単調区間それぞれに1つずつ解がある条件を作る。

【解答】

(1) $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ である。積の微分を用いると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x} \\ &= (a^2 - x^2)e^{-x} \end{aligned}$$

である。 $e^{-x} > 0$ なので、 $f'(x)$ の符号は $a^2 - x^2$ の符号で決まる。したがって

$$x < -a \text{ で } f'(x) < 0, \quad -a < x < a \text{ で } f'(x) > 0, \quad a < x \text{ で } f'(x) < 0$$

である。よって $x = -a$ で極小、 $x = a$ で極大となる。

値は $f(-a) = \{a^2 - 2a + 2 - a^2\}e^a = 2(1-a)e^a$ であり、 $f(a) = \{a^2 + 2a + 2 - a^2\}e^{-a} = 2(a+1)e^{-a}$ である。したがって極小値は $2(1-a)e^a$ で、極大値は $2(a+1)e^{-a}$ である。

(2) $g(x) = x^3e^{-x}$ とおく。微分すると $g'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$ である。 $x \geq 3$ では $3-x \leq 0$ なので $g'(x) \leq 0$ である。したがって $g(x)$ は $x \geq 3$ で減少し、 $x^3e^{-x} = g(x) \leq g(3) = 27e^{-3}$ が成り立つ。

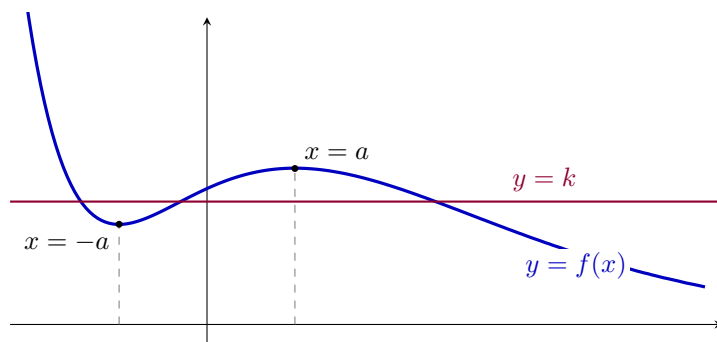
さらに、いま示した不等式をそのまま用いる。 $x \geq 3$ では

$$0 \leq x^2e^{-x} = \frac{x^3e^{-x}}{x} \leq \frac{27e^{-3}}{x}$$

である。右辺は $x \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから、はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x} = 0$$

である。



$0 < a < 1$ の模式例。水平線が 3 つの単調区間を 1 回ずつ横切る条件を読む。

(3)

2 つのグラフの交点は $x^2 + 2x + 2 = ke^x + a^2$ を満たす x に対応する。これを变形すると $(x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x} = k$ すなわち $f(x) = k$ である。

(1) より $f(x)$ は $(-\infty, -a)$ で減少、 $(-a, a)$ で増加、 (a, ∞) で減少する。また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。さらに $x \rightarrow -\infty$ では $(x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x} \rightarrow \infty$ である。

したがって、3 つの異なる交点をもつには、水平線 $y = k$ が 3 つの単調区間でそれぞれ 1 回ずつグラフを横切る必要がある。左と中央の 2 区間で交わるためには $2(1-a)e^a < k < 2(a+1)e^{-a}$ が必要である。さらに右側の区間 (a, ∞) では、 f は極大値 $2(a+1)e^{-a}$ から 0 へ減少するので、ここで交わるためには $0 < k < 2(a+1)e^{-a}$ が必要である。

以上を合わせると、必要十分条件は

$$\max\{0, 2(1-a)e^a\} < k < 2(a+1)e^{-a}$$

である。すなわち、場合分けして書けば

$$\begin{cases} 2(1-a)e^a < k < 2(a+1)e^{-a} & (0 < a < 1), \\ 0 < k < 2(a+1)e^{-a} & (a \geq 1) \end{cases}$$

となる。

【総評】 微分による増減と交点数判定を組み合わせる問題である。(3) では極小値と極大値だけでなく、右端で $f(x) \rightarrow 0$ となることが重要で、 $k > 0$ を落とすと右側の枝での交点を数え間違える。(2) の前半で示した不等式を x で割れば後半の極限が直ちに挟み撃ちでき、未習の級数展開を使う必要はない。目安時間は 25 分程度。

【第 3 問】

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

をみたしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ とするとき、

$$a_{n+k} = a_n \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ。

【方針】

正接の倍角公式で $a_n = \tan(2^{n-1}\theta)$ と表す。(1) では $\theta = \pi/6$ として、正接の周期 π から偶奇で値を整理する。(2) は倍角公式を逆向きに使う。(3) では $n \geq 3$ のため角度の分母から 2 の因子が十分に消えており、条件は $2^k \equiv 1 \pmod{5}$ に帰着する。

【解答】

(1)

正接の倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ より、 $a_n = \tan \theta_n$ とおくと $a_{n+1} = \tan 2\theta_n$ である。 $a_1 = 1/\sqrt{3} = \tan(\pi/6)$ だから $a_n = \tan\left(2^{n-1}\frac{\pi}{6}\right)$ である。 $n = 1$ では $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。 $n \geq 2$ では、 2^{n-1} は 3 で割ると $n-1$ が奇数のとき 2、偶数のとき 1 に合同である。したがって

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{3} & (n \geq 2 \text{ が偶数}), \\ -\sqrt{3} & (n \geq 3 \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。まとめると

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_n = \begin{cases} \sqrt{3} & (n \geq 2 \text{ が偶数}), \\ -\sqrt{3} & (n \geq 3 \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。

(2) $x = \tan \frac{\pi}{12}$ とおくと、 $0 < x < 1$ である。倍角公式から $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{2x}{1-x^2}$ である。よって $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ となり、 $x = -\sqrt{3} \pm 2$ である。正の解を選んで $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ である。

(3) $a_n = \tan\left(2^{n-1}\frac{\pi}{20}\right)$ である。条件 $a_{n+k} = a_n$ は

$$\tan\left(2^{n+k-1}\frac{\pi}{20}\right) = \tan\left(2^{n-1}\frac{\pi}{20}\right)$$

であることを意味する。正接の周期は π なので、これは $(2^{n-1}(2^k - 1))\frac{\pi}{20}$ が π の整数倍であることと同値である。 $n \geq 3$ では 2^{n-1} は少なくとも 4 を因数にもつ。したがって、すべての $n \geq 3$ で成り立つためには $5 \mid (2^k - 1)$ であればよい。すなわち $2^k \equiv 1 \pmod{5}$ である。

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 3, \quad 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

であるから、最小の自然数 k は 4 である。

【総評】 文系第 2 問と同じ倍角型の漸化式だが、(3) では $n \geq 3$ という条件によって分母 20 のうち 2 の因子が消える点を意識する必要がある。正接の周期が π であること、合同式の法が 5 になることを明示すれば、周期判定は早く終わる。目安時間は 16 分程度。

【第 4 問】

空間内の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(0,2,3)$, $B(1,0,3)$, $C(1,2,0)$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き、交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は球の中心 $D = (x, y, z)$ が O, A, B, C から等距離にあることを 3 本の一次方程式にして解く。(2) は平面 ABC の方程式を求め、点と平面の距離公式で DF を出す。(3) は ABC の面積をベクトルで求め、高さ DF を掛けて体積を求める。計算確認として、最後は行列式による体積計算も使える。

【解答】

(1)

球面の中心を $D = (x, y, z)$ とおく。 D は 4 点 O, A, B, C から等距離にあるので $DO^2 = DA^2 = DB^2 = DC^2$ である。

まず $DO^2 = DA^2$ より $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ である。整理して $4y + 6z = 13$ を得る。同様に $DO^2 = DB^2$ より $x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2$ なので $2x + 6z = 10$ である。また $DO^2 = DC^2$ より $x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$ だから $2x + 4y = 5$ である。

連立方程式

$$\begin{cases} 4y + 6z = 13, \\ 2x + 6z = 10, \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

を解くと $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{2}$ である。したがって $D(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ である。

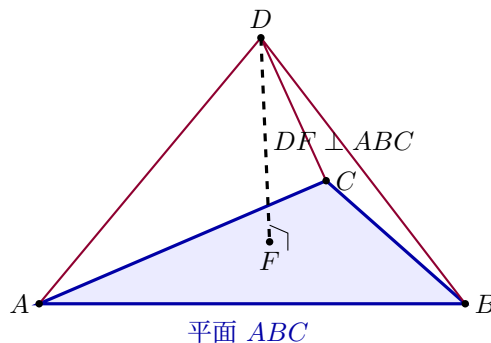
(2)

3 点 $A(0,2,3), B(1,0,3), C(1,2,0)$ を通る平面を $lx + my + nz = d$ とおく。3 点を代入して整理すると、平面 ABC の方程式は $6x + 3y + 2z = 12$ である。実際、 A, B, C はいずれもこの式を満たす。

点 $D(1/2, 1, 3/2)$ からこの平面までの距離が DF であるから

$$DF = \frac{|6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 12|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 3 + 3 - 12|}{7} = \frac{3}{7}$$

である。



四面体 $ABCD$ を底面 ABC 、高さ DF と見る。

(3)

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -2, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 0, -3)$$

である。したがって $|AB|^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$, $|AC|^2 = 1^2 + (-3)^2 = 10$ であり、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ である。よって三角形

ABC の面積は

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \sqrt{|AB|^2 |AC|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 10 - 1} = \frac{7}{2}$$

である。

四面体 $ABCD$ の底面を ABC 、高さを DF と見ると、体積は

$$\frac{1}{3} [\triangle ABC] \cdot DF = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

球面を一般形で置くと、4 点を代入するだけで中心が得られる。平面の法線ベクトルは外積に相当する成分計算で求め、最後は底面積と高さを別々に出さず、3 本の辺ベクトルが作る平行六面体の体積から四面体の体積を直接求める。

【解答】

(1)

原点 O を通る球面の方程式を

$$x^2 + y^2 + z^2 + ux + vy + wz = 0$$

とおく。点 A, B, C を順に代入すると

$$\begin{cases} 13 + 2v + 3w = 0, \\ 10 + u + 3w = 0, \\ 5 + u + 2v = 0 \end{cases}$$

を得る。これを解くと

$$u = -1, \quad v = -2, \quad w = -3.$$

平方完成すれば球面の中心は

$$D = \left(-\frac{u}{2}, -\frac{v}{2}, -\frac{w}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right)$$

である。

(2)

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -3)$$

の両方に垂直なベクトルとして $(6, 3, 2)$ を取れる。したがって平面 ABC は

$$6x + 3y + 2z = 12$$

である。点 D からこの平面までの距離は

$$DF = \frac{|6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 12|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3}{7}$$

となる。

(3)

$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2} \right)$$

である。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ が張る平行四辺形の有向面積ベクトルは $(6, 3, 2)$ なので、3 本のベクトルが作る平行六面体の体積は

$$\left| (6, 3, 2) \cdot \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2} \right) \right| = |3 - 3 - 3| = 3$$

である。四面体の体積はその $1/6$ だから

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

【総評】 空間座標の標準問題で、中心、平面、距離、体積を順に処理する。球の中心は非線形に見えるが、等距離条件で 2 乗を差し引けば一次方程式だけになる。平面 ABC の式 $6x + 3y + 2z = 12$ を正確に出せれば、(2)(3) は距離公式と底面積計算で進む。目安時間は 20 分程度。球面の一般形を使う別解では、中心決定が 3 元 1 次方程式に直結し、体積も 3 本の辺ベクトルから一度に検算できる。

【第 5 問】

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作： 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、 i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を n 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3) $n = 2$ のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4) $n = 3$ のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1)(2) は 2 回の交換を順序付きで数える。(3) はカード 1 の位置だけを追い、同じ位置に残る確率と指定位置へ移る確率を使う。(4) は 3 回後なので、1 枚のカードの位置遷移を 4 状態の対称な遷移として扱い、元の位置にある確率と指定した別位置にある確率を求める。その確率を左端の数字の期待値に代入する。

【解答】

(1)

1 回の操作で交換する 2 枚の選び方は ${}_4C_2 = 6$ 通りである。2 回の操作は順序付きで $6^2 = 36$ 通りある。

2 回後に元の並び 1, 2, 3, 4 に戻るには、2 回とも同じ 2 枚を交換すればよい。1 回目の選び方は 6 通りで、それぞれ 2 回目は同じ組に限られるから、有利な場合は 6 通りである。よって $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ である。

(2)

並び 4, 3, 2, 1 にするには、カード 1 と 4 を交換し、カード 2 と 3 を交換する必要がある。2 回の操作でこれを行うには、交換 (1, 4) と交換 (2, 3) を 1 回ずつ行えばよい。順序は 2 通りなので、確率は $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ である。

(3)

カード 1 の位置だけを見る。1 回の操作でカード 1 が同じ位置に残るには、交換する 2 枚にカード 1 が含まれなければよい。その確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。また、指定した別の位置へ移るには、その位置にあるカードとカード 1 を交換する必要があるから、確率は $\frac{1}{6}$ である。

2 回後に左端にある確率は、左端に残り続ける場合と、他の 3 位置のいずれかへ移ってから戻る場合を足せばよい。したがって $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$ である。

(4)

1 枚のカードについて、 n 回後に元の位置にある確率を p_n とする。元の位置にいるためには、直前にも元の位置にいて動かないか、直前に他の位置にいて元の位置へ移るかである。対称性により、元の位置以外の各位置にいる確率は $(1 - p_n)/3$ である。よって

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + 3 \cdot \frac{1-p_n}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1-p_n}{6} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}$$

である。

この漸化式の定常値は $p = 1/4$ であり、 $p_0 = 1$ だから $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。また、指定した別の位置にある確率は、対称性より $\frac{1-p_n}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。 $n = 3$ のとき、カード 1 が左端にある確率は $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{27} = \frac{5}{18}$ である。カード

2,3,4 が左端にある確率はそれぞれ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{27} = \frac{13}{54}$ である。したがって左端のカードの数字の期待値は

$$1 \cdot \frac{5}{18} + (2+3+4) \frac{13}{54} = \frac{15}{54} + \frac{117}{54} = \frac{22}{9}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1)(2) は交換を置換として分類する。(3) はカード 1 が左端にある確率の 1 次漸化式を作る。(4) は各カードの位置確率を求めず、左端の数 X_n の条件付き期待値を直接計算して、期待値だけの漸化式を解く。

【解答】

(1)

1 回の交換は 6 通りで、2 回の交換列は $6^2 = 36$ 通りが等確率である。2 つの互換の積が恒等置換になるのは同じ互換を 2 回行う場合だけである。よって有利な交換列は 6 通りで、確率は

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

である。

(2)

逆順の並びを作る置換は、互いに素な 2 つの互換の積

$$(14)(23)$$

である。2 回の交換では、この 2 つをどちらの順に行うかの 2 通りだけである。したがって確率は

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

である。

(3)

n 回後にカード 1 が左端にある確率を p_n とする。カード 1 が左端にあるとき、次の操作でも左端に残る確率は $1/2$ である。左端以外にあるとき、カード 1 と左端のカードが交換される確率は $1/6$ である。よって

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}.$$

$p_0 = 1$ であり、定常値は $1/4$ だから

$$p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

したがって

$$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

(4)

n 回後の左端の数字を X_n とする。左端が x のとき、交換後も x のままである確率は $1/2$ であり、残りの 3 つの数字はそれぞれ確率 $1/6$ で左端へ来る。4 枚の数字の和は 10 なので

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | X_n = x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}(10 - x) \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

両辺の期待値を取ると、 $\mu_n = E(X_n)$ は

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{3}\mu_n + \frac{5}{3}, \quad \mu_0 = 1$$

を満たす。定常値は $5/2$ だから

$$\mu_n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

ゆえに

$$E(X_3) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{27} = \frac{22}{9}.$$

【総評】 前半は文系第 4 問と同じ 2 回交換の数え上げである。後半は 3 回後の期待値なので、全ての並びを列挙するより、1 枚のカードの位置遷移に落とす方が確実である。元の位置にある確率 p_n の漸化式を作り、対称性で他の 3 位置の確率を等しく扱うのが要点である。目安時間は 18 分程度。別解の条件付き期待値の漸化式は、3 回後の全確率分布を作らずに期待値だけを更新できるため、(4) の計算量を大きく減らす。