

九州大学 2012 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

固定した x における円の縦線分を回転し、 $|x| \leq \sqrt{3}$ では円板、外側ではワッシャーになることを先に判定する。円弧積分は $x = 2 \sin \theta$ と置き、逆三角関数を使わず高校数学の範囲で計算する。

【解答】

円

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4$$

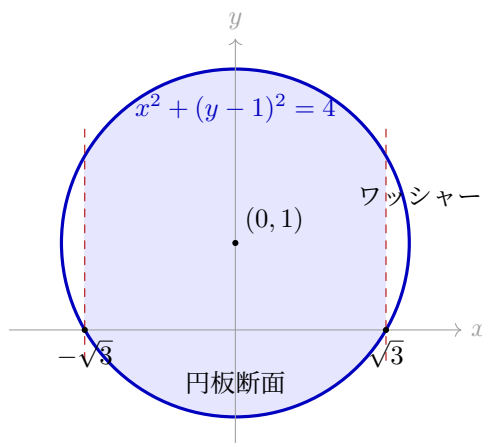
は中心 $(0, 1)$ 、半径 2 の円である。固定した x に対して

$$r(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

とおくと、円の内部での y の範囲は

$$1 - r(x) \leq y \leq 1 + r(x)$$

である。断面の型が変わる位置を元の円上で示すと次のようになる。



この縦線分を x 軸のまわりに回転する。 x 軸をまたぐのは

$$1 - r(x) \leq 0$$

すなわち $r(x) \geq 1$ のときであり、これは

$$|x| \leq \sqrt{3}$$

に等しい。

したがって、 $|x| \leq \sqrt{3}$ では断面は半径 $1 + r(x)$ の円板、 $\sqrt{3} < |x| \leq 2$ では外半径 $1 + r(x)$ 、内半径 $1 - r(x)$ のワッシャーになる。よって求める体積を V とすると

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + r(x))^2 dx + 8\pi \int_{\sqrt{3}}^2 r(x) dx$$

である。

円弧を含む積分は、 $x = 2 \sin \theta$ とおけば逆三角関数を用いずに計算できる。まず

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\pi/3} 4 \cos^2 \theta d\theta \\ &= [2\theta + \sin 2\theta]_0^{\pi/3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

また

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2} dx = [2\theta + \sin 2\theta]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

中央部分については

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1+r(x))^2 dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (5-x^2) dx + 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 8\sqrt{3} + 4 \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 10\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}V &= \pi \left(10\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \right) + 8\pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 6\pi\sqrt{3} + \frac{16\pi^2}{3} = \frac{2\pi}{3} (9\sqrt{3} + 8\pi).\end{aligned}$$

▶ 解法 2 (円筒殻による積分)

【方針】

x 軸からの距離 y が一定の円筒殻で立体を分ける。同じ円筒面へ回る上下の弦のうち長い方を採用し、 $u = y - 1$ と移して奇関数部分と円弧積分に分ける。

【解答】

半径 y の円筒面に現れる x 方向の長さを考える。 $0 \leq y \leq 3$ における高さ y の水平弦の長さは $2\sqrt{4-(y-1)^2}$ である。 $0 \leq y \leq 1$ では高さ $-y$ の弦も同じ円筒面へ回転するが、 $\sqrt{4-(y-1)^2} \geq \sqrt{4-(-y-1)^2}$ なので、下側の弦が作る殻は上側の弦が作る殻に含まれる。

したがって、半径 y 、高さ $2\sqrt{4-(y-1)^2}$ の円筒殻を $0 \leq y \leq 3$ で積み重ねればよい。体積は

$$V = 4\pi \int_0^3 y \sqrt{4-(y-1)^2} dy$$

である。 $u = y - 1$ とおき、2つの積分を I_1, I_2 と書くと

$$\begin{aligned}V &= 4\pi(I_1 + I_2), \\ I_1 &= \int_{-1}^2 u \sqrt{4-u^2} du = \left[-\frac{1}{3}(4-u^2)^{3/2} \right]_{-1}^2 = \sqrt{3}, \\ I_2 &= \int_{-1}^2 \sqrt{4-u^2} du.\end{aligned}$$

I_2 では $u = 2 \sin \theta$ とおく。積分区間は $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2$ だから

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 4 \cos^2 \theta d\theta \\ &= [2\theta + \sin 2\theta]_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}V &= 4\pi \left(\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{16\pi^2}{3} + 6\pi\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} (8\pi + 9\sqrt{3}).\end{aligned}$$

【総評】 回転軸が元の円の内部を通るため、断面法では円板とワッシャーを $|x| = \sqrt{3}$ で分ける必要がある。目安時間は 25 分。主解法では縦断面、別解では円筒殻を使うので、同じ立体を直交する 2 方向から検算できる。円弧積分は逆三角関数の公式を暗記せず、 $x = 2 \sin \theta$ の置換で区間まで明示すると高校数学の答案として安定する。

【第 2 問】

2 次の正方行列 A, B はそれぞれ

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

をみたすものとする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 E は 2 次の単位行列を表すものとする。

- (1) 行列 A, B, A^2, B^2 を求めよ。
- (2) $(AB)^3 = E$ であることを示せ。
- (3) 行列 A から始めて、 B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A, AB, ABA, ABAB, \dots,$$

および行列 B から始めて、 A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B, BA, BAB, BABA, \dots$$

を考える。これらの行列の中で、相異なるものをすべて成分を用いて表せ。

【方針】

(1) は 2 本の一次独立なベクトルへの作用が与えられているので、列ベクトルを並べた行列を使って A, B を決定する。得られた行列を直接 2 乗して $A^2 = B^2 = E$ も確認する。(2) は AB を計算し、 $(AB)^2, (AB)^3$ と順に掛ける。(3) は $A^2 = B^2 = E$ と $(AB)^3 = E$ により、交互積が 6 種類に周期化することを使い、 E, A, B, AB, BA, ABA をすべて成分で列挙する。

【解答】

(1) まず A を求める。与えられた条件を列ベクトルを並べて書くと

$$A \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$$

である。左の行列の行列式は $(-3)(-9) - 7 \cdot 5 = -8 \neq 0$ だから逆行列をもつ。したがって

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

である。

同様に B については

$$B \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

である。よって

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

である。

これらを 2 乗すると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

であり、

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。

(2) まず

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}$$

である。さらに

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$$

であり、

$$(AB)^3 = (AB)^2(AB) = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。

(3) $A^2 = B^2 = E$ であるから、同じ文字が連続した部分は消える。また $(AB)^3 = E$ であるから、交互に掛けてできる行列は周期的に繰り返される。

実際、相異なる候補は E, A, B, AB, BA, ABA の 6 種類で十分である。これらを成分で表すと

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix},$$

$$ABA = \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

である。

これら 6 個は互いに成分が異なる。また、 A から始める交互積も B から始める交互積も、 $A^2 = B^2 = E$ と $(AB)^3 = E$ によりこの 6 個のいずれかに必ず一致する。したがって、求める相異なる行列は上の 6 個である。

【総評】 与えられたベクトルへの作用から行列を復元し、交互積の周期性を調べる問題である。目安時間は 28 分。(1) は 2 本のベクトルが一次独立であること、すなわち並べた行列の行列式が 0 でないことを確認してから逆行列を使うとよい。(3) は行列をただ長く掛け続けるのではなく、 $A^2 = B^2 = E$ と $(AB)^3 = E$ によって候補が 6 種類に閉じることを説明するのが核心である。

【第 3 問】

実数 a と自然数 n に対して、 x の方程式

$$a(x^2 + |x + 1| + n - 1) = \sqrt{n}(x + 1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を、 n を用いて表せ。
- (2) この方程式が、すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

【方針】

$u = x + 1$ と置くと、絶対値の分岐点が $u = 0$ になる。 $u \geq 0$ では $a = \sqrt{n}u/(u^2 - u + n)$ 、 $u < 0$ では $u = -v$ として $a = -\sqrt{n}v/(v^2 + 3v + n)$ と表せる。どちらも分母は正であり、値域は 1 変数関数の最大値を微分で求めればよい。(2) は (1) の区間がすべての自然数 n で共通に含む部分を取るの、左端の最大値と右端の下限を調べる。

【解答】

(1) $u = x + 1$ とおく。すると $x = u - 1$ であり、 $x^2 + |x + 1| + n - 1 = (u - 1)^2 + |u| + n - 1 = u^2 - 2u + |u| + n$ である。方程式は $a\{u^2 - 2u + |u| + n\} = \sqrt{n}u$ となる。

まず $u \geq 0$ の場合を考える。このとき $|u| = u$ なので $a(u^2 - u + n) = \sqrt{n}u$ である。分母 $u^2 - u + n$ は $n \geq 1$ で常に正であるから、 $a = \frac{\sqrt{n}u}{u^2 - u + n}$ ($u \geq 0$) と表せる。

右辺を $F(u)$ とおくと、

$$F'(u) = \sqrt{n} \frac{(u^2 - u + n) - u(2u - 1)}{(u^2 - u + n)^2} = \sqrt{n} \frac{n - u^2}{(u^2 - u + n)^2}$$

である。したがって $F(u)$ は $0 \leq u \leq \sqrt{n}$ で増加し、 $u \geq \sqrt{n}$ で減少する。さらに $F(0) = 0$ 、 $u \rightarrow \infty$ で $F(u) \rightarrow 0$ である。最大値は $u = \sqrt{n}$ のとき $F(\sqrt{n}) = \frac{n}{2n - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1}$ である。よって $u \geq 0$ から得られる a の範囲は $0 \leq a \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1}$ である。

次に $u < 0$ の場合を考える。 $v = -u > 0$ とおくと、 $|u| = v$ であり、方程式は $a(v^2 + 3v + n) = -\sqrt{n}v$ となる。したがって $a = -\frac{\sqrt{n}v}{v^2 + 3v + n}$ ($v > 0$) である。

正の関数 $G(v) = \frac{\sqrt{n}v}{v^2 + 3v + n}$ を考えると、 $G'(v) = \sqrt{n} \frac{n - v^2}{(v^2 + 3v + n)^2}$ である。よって $G(v)$ は $v = \sqrt{n}$ で最大となり、その最大値は $G(\sqrt{n}) = \frac{n}{2n + 3\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3}$ である。 $v > 0$ であるから、 a は負の値を取り、0 には近づくがこの場合だけでは 0 を取らない。したがって $u < 0$ から得られる範囲は $-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3} \leq a < 0$ である。

2つの場合を合わせ、 $u = 0$ の場合に $a = 0$ も含まれるので、求める範囲は $-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1}$ である。

(2) すべての自然数 n に対して実数解を持つには、(1) で得たすべての区間に a が含まれればよい。つまり $-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1}$ がすべての自然数 n で成り立つ必要がある。

左端について、 $t = \sqrt{n} \geq 1$ とおくと $\frac{t}{2t + 3}$ は t が大きくなるほど増加する。したがって $-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3}$ は $n = 1$ のときが最大であり、最大値は $-\frac{1}{5}$ である。よってすべての n で左側の条件をみたすには $a \geq -\frac{1}{5}$ が必要十分である。

右端について、 $\frac{t}{2t - 1}$ ($t \geq 1$) は t が大きくなるほど減少し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2t - 1} = \frac{1}{2}$ である。各 n では右端は $1/2$ より大きい、すべての n で a が右端以下であるためには $a \leq \frac{1}{2}$ が必要十分である。

以上より、求める a の範囲は $-\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{1}{2}$ である。

【総評】 絶対値を含む方程式を、パラメータ a の値域問題へ変換する問題である。目安時間は 30 分。 $u = x + 1$ と置くと分岐が $u \geq 0$ と $u < 0$ にきれいに分かれ、どちらも同じ型の分数関数になる。(1) では分母が正であること、 $u = 0$ で

$a = 0$ が含まれることを確認する必要がある。(2) は各 n の区間の共通部分を取る問題で、右端は最小値を取らずに $1/2$ へ近づくが、 $a = 1/2$ はすべての区間に入る点が少し紛らわしい。

【第 4 問】

p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が実数解 α, β を持ち、条件 $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) \neq 0$ をみたしているとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) > 0$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ となるとき、 p と q の値をすべて求めよ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

【方針】

$\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$ を使い、 $\alpha^n + \beta^n$ を対称式として扱う。(1) は $s_n = \alpha^n + \beta^n$ が整数係数の漸化式をみたすことから示す。(2) は $|\alpha|, |\beta|$ がともに 1 未満、またはともに 1 より大きい場合に分ける。前者では $a_n \rightarrow 1$ 、後者では q^n が支配的になり、比の極限はそれぞれ 1、 $|q|$ で整数である。(3) は極限が無理数なので (2) の場合ではなく、一方の根の絶対値だけが 1 より大きい場合を考える。このとき極限は絶対値が 1 より大きい根の絶対値になり、整数係数の 2 次方程式に $\pm(1 + \sqrt{5})/2$ が根として入ることから p, q を決める。

【解答】

(1) 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が α, β であるから、解と係数の関係より $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$ である。 $s_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。 α, β はともに $r^2 + pr + q = 0$ をみたすので $r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n = 0$ が成り立つ。 $r = \alpha, \beta$ について足し合わせると $s_{n+2} + ps_{n+1} + qs_n = 0$ すなわち $s_{n+2} = -ps_{n+1} - qs_n$ である。

ここで $s_0 = 2, s_1 = \alpha + \beta = -p$ は整数であり、 p, q も整数である。したがって漸化式により s_n はすべて整数である。また

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) = (\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1 = q^n - s_n + 1$$

である。よって q^n, s_n が整数なので、特に a_1, a_2, a_3 はいずれも整数である。

(2) 条件 $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) > 0$ は、 $|\alpha|, |\beta|$ がともに 1 より大きい、またはともに 1 より小さいことを意味する。

まず $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ のとき、 $\alpha^n \rightarrow 0, \beta^n \rightarrow 0$ であるから $a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \rightarrow 1$ である。したがって $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$ であり、極限值は整数である。

次に $|\alpha| > 1, |\beta| > 1$ のときを考える。このとき $|q| = |\alpha\beta| > |\alpha|, |q| > |\beta|$ である。したがって $a_n = q^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1$ では q^n が支配的であり、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow q$ となる。よって $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow |q|$ である。 q は整数なので、 $|q|$ も整数である。

以上より、条件のもとで極限值は整数である。

(3) 極限值 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ は整数ではない。したがって (2) の条件は成り立たず、 $|\alpha|, |\beta|$ の一方が 1 より大きく、他方が 1 より小さい場合である。

たとえば $|\alpha| > 1, |\beta| < 1$ とする。このとき $|\alpha\beta| < |\alpha|$ であるから、 $a_n = q^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1$ では α^n が支配的である。したがって $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow |\alpha|$ である。同様に、 $|\beta| > 1, |\alpha| < 1$ のときは極限值は $|\beta|$ である。

よって、絶対値が 1 より大きい方の根の絶対値が $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ でなければならない。つまり根の一つは φ または $-\varphi$ である。

φ は $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ をみたす。 p, q は整数で、方程式は最高次係数 1 の 2 次方程式だから、無理数根 φ をもてば、もう一つの根はその共役 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ である。したがって方程式は $x^2 - x - 1 = 0$ であり、 $(p, q) = (-1, -1)$ である。

同様に、根の一つが $-\varphi$ のときは、もう一つの根は $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であり、方程式は $x^2 + x - 1 = 0$ である。したがって $(p, q) = (1, -1)$ である。

実際、これら 2 つの場合はいずれも根の一方の絶対値が φ 、もう一方の絶対値が $1/\varphi < 1$ であり、条件 $|\alpha| \neq 1$ 、 $|\beta| \neq 1$ もみたす。よって求める組は $(p, q) = (-1, -1), (1, -1)$ である。

【総評】 対称式の整数性と、根の絶対値による極限の支配項を組み合わせる問題である。目安時間は 35 分。(1) は $\alpha^n + \beta^n$ の漸化式を作ると、個々の根が無理数でも整数性を示せる。(2) は両方が単位円の内側なら $a_n \rightarrow 1$ 、両方が外側なら q^n が支配的になるという二分が核心である。(3) は極限が整数でないため、片方だけが絶対値 1 を超える場合に限られる。無理数根をもつ整数係数の 2 次方程式では共役も根になる、という点を明示すると p, q の候補を漏れなく絞れる。

【第 5 問】

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき、次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ、その後、箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個、箱 B に白玉が 2 個入っているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに、箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

【方針】

箱 A の黒玉数を状態 1, 2, 3 とし、試行 T による遷移確率を先に表にする。各遷移は「A から 2 個出す」「4 個になった B から 2 個戻す」の 2 段階に分けて数える。(1) は初期状態 3 から 1 回、(2)(3) は同じ遷移表を順に使って求める。

【解答】

箱 A には常に 3 個の玉があり、黒玉は全体で 3 個、白玉は全体で 2 個である。そこで、箱 A の黒玉数が k 個である状態を k と書く。可能な状態は 1, 2, 3 である。

たとえば状態 3 では、A から出る 2 個はともに黒玉である。移した後の B は黒玉 2 個、白玉 2 個なので、B から戻る黒玉数が 0, 1, 2 である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}, \quad \frac{{}_2C_1{}_2C_1}{{}_4C_2}, \quad \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{6}$$

である。同様に状態 1、状態 2 でも、A から出す黒玉数ごとに分けると、1 回の試行 T による遷移確率は次の表になる。

	1	2	3
1	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

たとえば第 2 行は、A から黒玉 2 個を出す確率 $\frac{1}{3}$ と、黒玉 1 個、白玉 1 個を出す確率 $\frac{2}{3}$ に分けて得られる。

(1) 初期状態は 3 であるから、表の第 3 行より

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{6}$$

である。

(2) (1) の分布に遷移確率をもう一度掛けると

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{18} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{18} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{18} = \frac{5}{18}, \\ q_2 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{18} + \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} = \frac{11}{18}, \\ q_3 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

である。

(3) 2 回後の各状態から状態 3 へ移る確率を足し合わせればよい。したがって

$$\frac{5}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{11}{18} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{108}$$

である。

【総評】 箱 A の黒玉数だけを状態にするのが核心である。目安時間は 25 分。試行の途中では箱 B が 4 個になるので、戻す段階の分母は ${}_4C_2$ となる。同じ遷移表を (2)(3) で使い、各行の和が 1 になることも検算するとよい。