

九州大学 2013 年度 文系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

一辺の長さが 1 の正方形 $OABC$ を底面とし、 $OP = AP = BP = CP$ をみたす点 P を頂点とする四角錐 $POABC$ がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D 、辺 CP の中点を E 、辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ を、 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を、 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OP}$ と t を用いて表せ。
- (3) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。
- (4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき、 t の値および線分 OP の長さを求めよ。

【方針】

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とおき、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ 、 $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$ を使う。等距離条件から $\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{c} \cdot \vec{p} = 1/2$ が出る。内分点 D, E, Q を $\vec{a}, \vec{c}, \vec{p}$ で表し、 PQ が平面 ODE に垂直である条件を $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ 、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$ として連立する。

【解答】

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{p} = \overrightarrow{OP}$$

とおく。正方形の一辺は 1 なので $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ である。

(1) 点 D は辺 AP を $1:3$ に内分するので $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{p}$ である。また E は辺 CP の中点なので $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{p}$ である。

(2) B の位置ベクトルは $\vec{a} + \vec{c}$ である。点 Q は BC を $t:(1-t)$ に内分するから $\overrightarrow{OQ} = (1-t)(\vec{a} + \vec{c}) + t\vec{c} = (1-t)\vec{a} + \vec{c}$ である。したがって $\overrightarrow{PQ} = (1-t)\vec{a} + \vec{c} - \vec{p}$ である。

(3) $OP = AP$ より $|\vec{p}|^2 = |\vec{p} - \vec{a}|^2$ である。右辺を展開すると $|\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} + |\vec{a}|^2$ だから $\vec{a} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2}$ である。同様に $OP = CP$ から $\vec{c} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2}$ も得られる。

(4) $s = |\vec{p}|^2$ とおく。直線 PQ が平面 ODE に垂直であるためには、平面上の 2 本の方向 OD, OE に垂直であればよい。したがって

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$$

である。

(1), (2), (3) を用いて計算する。まず

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OD} = \{(1-t)\vec{a} + \vec{c} - \vec{p}\} \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{p}\right)$$

$= \frac{7}{8}(1-t) - \frac{1}{4} - \frac{s}{4}$ である。よって $7t + 2s = 5$ を得る。次に

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OE} = \{(1-t)\vec{a} + \vec{c} - \vec{p}\} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{p}\right)$$

$= \frac{1-t}{4} + \frac{1}{2} - \frac{s}{2}$ である。よって $t + 2s = 3$ を得る。2 式を引くと $6t = 2$ なので $t = \frac{1}{3}$ である。これを $t + 2s = 3$ に代入して $s = \frac{4}{3}$ を得る。したがって $OP = \sqrt{s} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ であり、 $t = \frac{1}{3}$ である。

【総評】 難度 6、目安 24 分。得点源は (1)~(3) の内分公式と等距離条件で、(4) の連立 2 式が合否を分ける。 $OP = AP$ から $\vec{a} \cdot \vec{p} = 1/2$ を取り出し、平面に垂直という条件を $PQ \cdot OD = PQ \cdot OE = 0$ とするのが中心である。Q の内分比から位置ベクトルを作る際に係数を逆にすること、未知量を OP のまま扱って平方根を混ぜることが多い。 $s = |\vec{p}|^2$ と置き、最後に正の平方根を取る構成が安全である。

【第 2 問】

座標平面上で、次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x + 2y \leq 5, \quad 3x + y \leq 8, \quad -2x - y \leq 4, \quad -x - 4y \leq 7$$

点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $x + y$ の値が最大となる点を Q とし、最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。
- (2) $a > 0$ かつ $b > 0$ とする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $ax + by$ が点 Q でのみ最大値をとり、点 R でのみ最小値をとるとする。このとき、 $\frac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

4 本の境界直線の交点を求め、すべての不等式を満たす 4 頂点を確定する。線形関数 $x + y$ は多角形の頂点で最大・最小をとるので、各頂点の値を比較する。(2) では、点 Q でのみ最大となる条件を Q に接する 2 辺の外向き法線の正の結合、点 R でのみ最小となる条件を R に接する 2 辺の法線の正の結合として表し、 a/b の 2 つの开区間の共通部分を取る。

【解答】

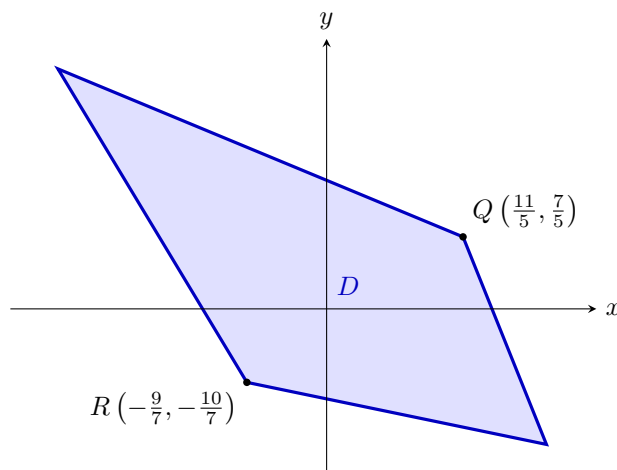
(1) 境界直線を $L_1: x + 2y = 5$, $L_2: 3x + y = 8$, $L_3: 2x + y = -4$, $L_4: x + 4y = -7$ と書く。ただし後ろ 2 つは元の不等式を整理したものである。 L_1 と L_2 の交点は $Q = \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$ である。この点では $x + y = \frac{18}{5}$ となる。また L_3 と L_4 の交点は $R = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ であり、この点では $x + y = -\frac{19}{7}$ となる。

他の頂点も境界直線の交点として求められるが、線形関数 $x + y$ は領域の頂点で最大・最小をとる。各頂点で比較すると、最大となる点は $Q = \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$ であり、最小となる点は $R = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ である。

(2) 点 Q は境界 L_1, L_2 の交点である。 $ax + by$ が Q でのみ最大となるには、法線ベクトル (a, b) が L_1, L_2 の外向き法線 $(1, 2)$, $(3, 1)$ の正の係数の和として表されればよい。したがって、ある正の数 λ, μ を用いて $(a, b) = \lambda(1, 2) + \mu(3, 1)$ と書ける。このとき $\frac{a}{b} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\lambda + \mu}$ であり、 $\lambda, \mu > 0$ から $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 3$ である。

一方、点 R は境界 L_3, L_4 の交点である。 $ax + by$ が R でのみ最小となるには、 $-(a, b)$ が元の不等式 $-2x - y \leq 4$, $-x - 4y \leq 7$ の外向き法線 $(-2, -1)$, $(-1, -4)$ の正の係数の和として表されればよい。これは (a, b) が $(2, 1)$, $(1, 4)$ の正の係数の和で表されることと同じである。よって $\frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2$ である。

両方の条件を同時に満たすには、2 つの範囲の共通部分を取ればよい。したがって $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$ である。端点では最大または最小を辺全体でとってしまうため、「点 Q でのみ」「点 R でのみ」という条件に反する。



青色の四角形が領域 D である。等高線を平行移動すると、 $x + y$ の最大点が Q 、最小点が R であることも図から確認できる。

▶ 解法 2 (等高線の傾き)

【方針】

領域の 4 頂点を求めて (1) を処理する。(2) は直線 $ax + by = c$ の傾き $-a/b$ に注目する。Q および R で接する 2 辺の傾きの間に等高線の傾きが厳密に入ることが、各点だけで極値をとる必要十分条件である。端点では辺全体で同じ値をとるため、不等号を厳密にする。

【解答】

(1) 4 本の境界直線のうち、領域 D の隣り合う辺どうしの交点を求めると

$$\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right), \quad \left(-\frac{13}{3}, \frac{14}{3}\right), \quad \left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right), \quad \left(\frac{39}{11}, -\frac{29}{11}\right)$$

である。それぞれで $x + y$ を計算すると

$$\frac{18}{5}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{19}{7}, \quad \frac{10}{11}$$

となる。よって

$$Q = \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right), \quad R = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$$

である。

(2) 等高線 $ax + by = c$ の傾きは $-a/b$ である。点 Q に接する 2 辺は

$$x + 2y = 5, \quad 3x + y = 8$$

であり、その傾きはそれぞれ $-1/2, -3$ である。等高線を平行移動したとき Q だけで最大値をとる条件は

$$-3 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{2},$$

すなわち

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 3 \tag{1}$$

である。

点 R に接する 2 辺は $2x + y = -4, x + 4y = -7$ で、傾きは $-2, -1/4$ である。 R だけで最小値をとる条件は

$$-2 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{4},$$

すなわち

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2 \tag{2}$$

である。(1)、(2) の共通部分を取って

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$$

を得る。いずれかの端点では等高線が辺と重なり、極値をとる点が 1 点に定まらないので除く。

【総評】 難度 5、目安 22 分。(1) の頂点計算は確実に取りたい。満点の鍵は (2) の「Q でのみ」「R でのみ」を開区間として処理することである。法線ベクトルの正の結合と等高線の傾きは同じ条件を別方向から見ており、どちらでもよい。境界の傾きの大小を負号付きのまま比較して不等号を逆転し忘れること、端点を含めて辺全体で極値を取らせることが典型的な失点である。図に Q、R と隣接 2 辺を書いてから条件を立てると答案が整理される。

【第 3 問】

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。

L: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各硬貨を「反転した回数の偶奇」で管理する。操作 L の出目を i 、操作 R の出目を j とし、左端からの区間と右端からの区間を集合として表す。(1) は 2 つの左端区間の対称差の大きさ、(2) は硬貨ごとの表である確率を足す期待値の線形性、(3) は 2 回の L で奇数回反転される区間が R の右端区間と一致する条件を調べる。最後に順序付き出目の総数 6^2 、 6^3 で割る。

【解答】

硬貨を左から順に 1 番, 2 番, ..., 6 番とする。

(1) 2 回の操作 L の出目を i, j とする。1 回目は左から i 枚、2 回目は左から j 枚を反転する。2 回とも反転された硬貨は表に戻るので、最終的に裏になる硬貨の枚数は $|i - j|$ である。表が 1 枚になるには、裏が 5 枚になればよいから $|i - j| = 5$ である。 $1 \leq i, j \leq 6$ でこれを満たすのは $(i, j) = (1, 6), (6, 1)$ の 2 通りである。よって求める確率は $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ である。

(2) 操作 L の出目を i 、操作 R の出目を j とする。左から r 番目の硬貨について考える。この硬貨が操作 L で反転される確率は $\frac{7-r}{6}$ であり、操作 R で反転される確率は $\frac{r}{6}$ である。2 つの出目は独立である。

この硬貨が最後に表であるのは、2 回とも反転されるか、2 回とも反転されない場合である。したがってその確率は

$$\frac{7-r}{6} \cdot \frac{r}{6} + \left(1 - \frac{7-r}{6}\right) \left(1 - \frac{r}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{r(7-r)}{18} \text{ である。よって表の枚数の期待値は}$$

$$\sum_{r=1}^6 \left(-\frac{1}{6} + \frac{r(7-r)}{18} \right) = -1 + \frac{1}{18} \sum_{r=1}^6 r(7-r)$$

である。ここで $\sum_{r=1}^6 r(7-r) = 7 \sum_{r=1}^6 r - \sum_{r=1}^6 r^2 = 147 - 91 = 56$ だから、期待値は $-1 + \frac{56}{18} = \frac{19}{9}$ である。

(3) 3 回の出目を順に i, j, k とする。2 回の操作 L によって奇数回反転される硬貨は、左端から i 枚の集合と左端から k 枚の集合の差である。これは、 $i < k$ なら $\{i+1, i+2, \dots, k\}$ であり、 $i > k$ なら $\{k+1, k+2, \dots, i\}$ である。 $i = k$ なら空集合である。

操作 R によって反転される硬貨は右端から j 枚、すなわち $\{7-j, 8-j, \dots, 6\}$ である。すべての硬貨が表に戻るには、操作 R で反転される集合と、2 回の操作 L で奇数回反転される集合が一致すればよい。 $i < k$ の場合、一致するには右端が 6 でなければならないので $k = 6$ 、さらに $i = 6 - j$ である。 $j = 1, 2, \dots, 5$ について 5 通りある。 $i > k$ の場合も同様に $i = 6$ 、 $k = 6 - j$ であり、これも 5 通りある。 $j = 6$ では i または k が 0 になってしまうので不適である。

したがって有利な出目は $5 + 5 = 10$ 通りであり、全体は $6^3 = 216$ 通りである。求める確率は $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$ である。

▶ 解法 2 (出目の和と区間で数える)

【方針】

(1) は 2 回の L の出目の差、(2) は L と R の出目の和 $s = i + j$ で場合をまとめる。重ならない場合と重なる場合で表の枚数がそれぞれ $6 - s$ 、 $s - 6$ になる。(3) は左端区間 2 つの対称差が必ず 1 つの連続区間になることを使い、その区間が右端に達する条件から出目を直接数える。

【解答】

(1) 2 回の出目を i, j とする。左から $\min(i, j)$ 枚は 2 回反転して表に戻り、その次の $|i - j|$ 枚だけが裏になる。したがって最後の表の枚数は

$$6 - |i - j|$$

である。これが 1 となるのは $|i - j| = 5$ 、すなわち

$$(i, j) = (1, 6), (6, 1)$$

の 2 通りである。よって確率は

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

である。

(2) L、R の出目を i, j とし、 $s = i + j$ とおく。 $2 \leq s \leq 6$ では左右の反転区間は重ならず、表は中央に $6 - s$ 枚残る。この和を与える順序付きの組は $s - 1$ 通りである。

$7 \leq s \leq 12$ では 2 つの区間が重なり、その重なりだけが 2 回反転して表に戻る。表の枚数は $s - 6$ 、組の数は $13 - s$ 通りである。したがって 36 通りにおける表の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^6 (s-1)(6-s) + \sum_{s=7}^{12} (13-s)(s-6) \\ = 20 + 56 = 76. \end{aligned}$$

ゆえに期待値は

$$\frac{76}{36} = \frac{19}{9}$$

である。

(3) 左から m 枚の集合を $F_m = \{1, 2, \dots, m\}$ 、右から j 枚の集合を $G_j = \{7 - j, \dots, 6\}$ とする。3 回の出目を i, j, k とすれば、すべて表に戻る条件は

$$F_i \triangle F_k = G_j$$

である。ただし左辺は 2 つの集合のうち一方だけに属する硬貨の集合を表す。

$i < k$ なら左辺は $\{i + 1, \dots, k\}$ である。これが右端区間 G_j と一致するには

$$k = 6, \quad i = 6 - j$$

が必要十分である。 $i \geq 1$ より $j = 1, 2, \dots, 5$ の 5 通りを得る。 $i > k$ の場合も $i = 6$ 、 $k = 6 - j$ の 5 通りである。 $i = k$ では左辺が空集合なので不適である。したがって有利な出目は 10 通りであり、

$$\frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

である。

【総評】 難度 5、目安 20 分。配点の中心は、硬貨の並びを毎回書かず「反転回数の偶奇」へ言い換えるところと、(3) の 10 通りを条件付きで数えるところにある。(2) は期待値の線形性でも出目の和でも解ける。左右の反転区間が重なった部分は 2 回反転して表に戻る点、(3) で出目の順序を区別する点が典型的な失点箇所である。答えは各小問で全事象数を明記し、有利な順序付き組の数を示してから約分すると検算しやすい。

【第 4 問】

座標平面上の円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = x - 2$ は円 C に接することを示せ。また、接点の座標も求めよ。
- (2) 円 C と放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $y \geq \frac{1}{4}x^2 - 1$ の表す領域を D とする。また、不等式 $|x| + |y| \leq 2$ の表す領域を A とし、不等式 $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ の表す領域を B とする。そして、和集合 $A \cup B$ 、すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき、領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し、さらに、その面積を求めよ。

【方針】

(1) は円の中心から直線までの距離を半径と比較し、垂線の足を接点とする。(2) は放物線を円へ代入し、実数解を因数分解と判別式で絞る。(3) は絶対値のできる領域が y 軸対称であることを使う。右半分を $0 \leq x \leq 2$ と $2 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$ に分け、前者は放物線から円の上弧まで、後者は円の縦断面全体を積分する。最後に 2 倍し、図の境界と積分区間が一致することを確認する。

【解答】

(1) 円 C の中心は $(1, 1)$ 、半径は $\sqrt{2}$ である。直線 $y = x - 2$ を $x - y - 2 = 0$ と書くと、中心 $(1, 1)$ からこの直線までの距離は $\frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$ である。これは半径に等しいので、直線 $y = x - 2$ は円 C に接する。

接点は中心から直線へ下ろした垂線の足である。直線 $y = x - 2$ に垂直で中心を通る直線は $y - 1 = -(x - 1)$ すなわち $y = -x + 2$ である。これを $y = x - 2$ と連立すると $x = 2$, $y = 0$ である。したがって接点は $(2, 0)$ である。

(2) 放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ を円の式に代入する。 $(x - 1)^2 + (\frac{1}{4}x^2 - 2)^2 = 2$ である。両辺を 16 倍して整理すると $x^4 - 32x + 48 = 0$ となる。これは $x^4 - 32x + 48 = (x - 2)^2(x^2 + 4x + 12)$ と因数分解できる。 $x^2 + 4x + 12$ は判別式 $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -32 < 0$ なので実数解をもたない。よって共有点の x 座標は $x = 2$ のみであり、そのとき $y = \frac{1}{4} \cdot 4 - 1 = 0$ である。したがって共有点は $(2, 0)$ だけである。

(3) 領域は y 軸に関して対称であるから、右半分の面積を求めて 2 倍する。 $x \geq 0$ では、領域 B は円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ である。 $0 \leq x \leq 2$ では、 A と B がつながっており、 D との共通部分の下側は放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 上側は円 B の上側 $y = 1 + \sqrt{2 - (x - 1)^2}$ である。したがってこの部分の面積は

$$\int_0^2 \left\{ 1 + \sqrt{2 - (x - 1)^2} - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right\} dx$$

である。

また $2 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$ では、円 B の縦断面全体が放物線の上にあるので、面積は

$$\int_2^{1+\sqrt{2}} 2\sqrt{2 - (x - 1)^2} dx$$

である。

よって求める面積 S は

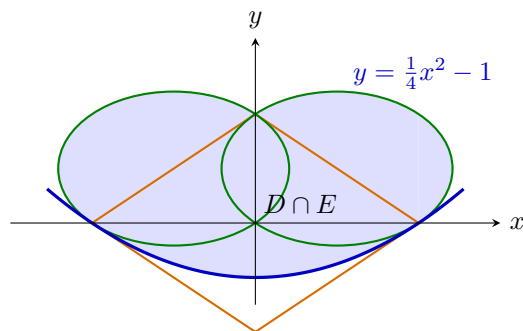
$$S = 2 \left\{ \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{4} + \sqrt{2 - (x - 1)^2} \right) dx + \int_2^{1+\sqrt{2}} 2\sqrt{2 - (x - 1)^2} dx \right\}$$

である。ここで $u = x - 1$ とおくと、円弧部分は半径 $\sqrt{2}$ の円の面積で計算できる。実際に積分を整理すると

$$\int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{10}{3}$$

であり、2 つの円弧積分を合わせた右半分の円弧部分は π になる。

したがって右半分の面積は $\frac{10}{3} + \pi$ であり、全体の面積は $\frac{20}{3} + 2\pi$ である。



青色部分が $D \cap E$ であり、境界を含む。橙色は $|x| + |y| = 2$ 、緑色は $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 、青い曲線は放物線を表す。

【総評】 難度 8、目安 35 分。(1)(2) は接点 $(2, 0)$ を二つの方法で確認する得点源で、主戦場は (3) の領域把握と積分区間の分割である。絶対値による y 軸対称性を使い、右半分で $x = 2$ を境に「放物線から円の上弧まで」と「円の縦断面全体」を分ける。A と B を別々に積分して重複を引く方法は重なるの管理で失点しやすい。図、上下の境界、積分式を同じ順番で書き、最後に 2 倍したかを確認するのが満点答案の構成である。