

入 学 試 験 問 題



数 学

九 州 大 学 2013 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

O を原点とする xyz 空間内の点 A, B, C の座標をそれぞれ $(0, 1, 0)$, $(0, -2, 0)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A, B, C, D が正四面体の頂点となるときの、点 D の座標を求めよ。ただし、点 D の z 座標は正とする。
- (2) (1) で定めた点 D に対して、線分 CD を $2:1$ に内分する点を E 、線分 AD を $2:1$ に内分する点を F とする。このとき、三角形 OEF の面積を求めよ。
- (3) (2) で定めた点 E, F に対して、点 O, E, F を通る平面が、点 O, E, F 以外で正四面体 $ABCD$ の辺と交わる点の座標を求めよ。

第 2 問

原点を出発し、数直線上を動く点 P がある。このとき、次の試行 T を考える。

(試行 T) P は、1 枚の硬貨を投げて表が出たら正の向きに 1 だけ移動し、裏が出たら負の向きに 1 だけ移動する。移動後に、 P が原点にあるとき、あるいは原点からの距離が 3, 6, 9 の位置にあるときには、白玉を 1 個もらう。

この試行 T を 10 回繰り返すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 10 回目の試行で初めて白玉をもらう確率を求めよ。
- (2) 2 回目の試行で初めて白玉をもらい、かつ、その後は白玉をもらわない確率を求めよ。
- (3) もらう白玉の総数が 1 個である確率を求めよ。
- (4) もらう白玉の総数が 2 個である確率を求めよ。

第 3 問

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次式により定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して、 xy 平面上の点 (a_n, b_n) が双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ の上にあることを証明せよ。

(2) r, s, t は正の実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} r & -r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が次の関係式を満たすとする。

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

このとき、 r, s, t を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

第 4 問

α を $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし、数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & (\theta_n \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ \theta_n - \alpha & (\theta_n > \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) x_3 が最大となる α を求めよ。
- (2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が最大となる α と、その極限值を求めよ。

第 5 問

O を原点とする xy 平面上の曲線 $y = e^{-x}|\sin x|$ ($x \geq 0$) を C とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ の範囲で y が最大となる曲線 C 上の点を P_n とする。このとき、点 P_n の座標を求めよ。
- (2) 点 P_n から x 軸に下ろした垂線を P_nH_n とし、三角形 OP_nH_n の面積を S_n とするとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。
- (3) 曲線 C と線分 OP_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)