

九州大学 2013 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

O を原点とする xyz 空間内の点 A, B, C の座標をそれぞれ $(0, 1, 0), (0, -2, 0), \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A, B, C, D が正四面体の頂点となるとき、点 D の座標を求めよ。ただし、点 D の z 座標は正とする。
- (2) (1) で定めた点 D に対して、線分 CD を $2:1$ に内分する点を E 、線分 AD を $2:1$ に内分する点を F とする。このとき、三角形 OEF の面積を求めよ。
- (3) (2) で定めた点 E, F に対して、点 O, E, F を通る平面が、点 O, E, F 以外で正四面体 $ABCD$ の辺と交わる点の座標を求めよ。

【方針】

底面 ABC が一辺 3 の正三角形であることを確認し、その重心の真上に正四面体の第 4 頂点 D を置く。(2) は内分公式で E, F を求め、 $\vec{OE}$ と $\vec{OF}$ の内積から三角形の面積を出す。(3) は外積に相当する成分計算で平面 OEF の方程式を作り、各辺の両端における左辺の符号から新しい交点が BC 上だけにあると絞って、その内分パラメータを求める。

【解答】

(1) 与えられた 3 点について $AB = 3, BC = 3, CA = 3$ であるから、 $\triangle ABC$ は一辺 3 の正三角形である。その重心を G とすると $G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ である。

正四面体では、点 D は底面の重心 G を通り底面に垂直な直線上にある。正三角形の外接円半径は $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ であり、正四面体の辺長は 3 だから、高さ h は $h^2 = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 6$ を満たす。 D の z 座標は正なので $D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{6}\right)$ である。

(2) E は CD を $2:1$ に内分するので

$$E = \frac{C+2D}{3} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

である。また F は AD を $2:1$ に内分するので $F = \frac{A+2D}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ である。 O は原点なので、 $\triangle OEF$ の面積は内積を使って求められる。まず $|\vec{OE}|^2 = 5, |\vec{OF}|^2 = 3$ であり、さらに

$$\vec{OE} \cdot \vec{OF} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{7}{2}$$

である。したがって

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 3 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

である。

(3) $\vec{OE} = (5\sqrt{3}/6, -1/2, 2\sqrt{6}/3), \vec{OF} = (\sqrt{3}/3, 0, 2\sqrt{6}/3)$ である。平面 OEF は原点を通るので、その方程式を $ax + by + cz = 0$ とおく。 E, F の座標を代入して係数を求めると

$$2\sqrt{6}x + 6\sqrt{2}y - \sqrt{3}z = 0 \quad (1)$$

を得る。

式 (1) の左辺を $L(x, y, z)$ とする。各頂点では

$$L(A) = L(C) = 6\sqrt{2} > 0, \quad L(B) = -12\sqrt{2} < 0, \quad L(D) = -3\sqrt{2} < 0$$

である。したがって辺 AC, BD には新しい交点がなく、既知の $O \in AB, E \in CD, F \in AD$ 以外の交点は辺 BC 上にある。

辺 BC 上の点を

$$X = B + u(C - B) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}u, -2 + \frac{3}{2}u, 0 \right) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

とおく。これを (1) へ代入すると

$$9\sqrt{2}u + 6\sqrt{2} \left(-2 + \frac{3}{2}u \right) = 0,$$

すなわち

$$18\sqrt{2}u - 12\sqrt{2} = 0.$$

よって $u = 2/3$ であり、

$$X = (\sqrt{3}, -1, 0)$$

である。

【総評】 難度 6、目安 26 分。(1) の正四面体の高さ、(2) の内分点と面積、(3) の平面と辺の交点が均等な得点源である。底面重心の座標を平均で出し、外接円半径 $\sqrt{3}$ から高さ $\sqrt{6}$ を求める。内分公式の係数を逆にすること、面積公式の最後の $1/2$ を落とすことが典型ミスである。(3) は平面方程式を作った後、 AC と BD に交点がないことを端点の符号で確認してから BC を解くと、交点の数まで含めた完全な答案になる。

【第 2 問】

原点を出発し、数直線上を動く点 P がある。このとき、次の試行 T を考える。

(試行 T) P は、1 枚の硬貨を投げて表が出たら正の向きに 1 だけ移動し、裏が出たら負の向きに 1 だけ移動する。移動後に、 P が原点にあるとき、あるいは原点からの距離が 3, 6, 9 の位置にあるときには、白玉を 1 個もらう。

この試行 T を 10 回繰り返すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 10 回目の試行で初めて白玉をもらう確率を求めよ。
- (2) 2 回目の試行で初めて白玉をもらい、かつ、その後は白玉をもらわない確率を求めよ。
- (3) もらう白玉の総数が 1 個である確率を求めよ。
- (4) もらう白玉の総数が 2 個である確率を求めよ。

【方針】

白玉をもらう位置を $W = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9\}$ とする。(1)(2) は白玉位置を避ける経路が、正側または負側で $1, 2, 1, 2, \dots$ と往復する 2 通りしかないことを使う。(3)(4) は時刻 n 、位置 p 、白玉数 k まで区別した経路数 $N_n(p, k)$ を定め、左右 1 歩の漸化式で 10 回更新する。総数が各時刻で 2^n になることも表で確認して数え落としを防ぐ。

【解答】

白玉をもらう位置の集合を $W = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9\}$ とする。10 回の硬貨投げはすべて同様に確からしく、全体は $2^{10} = 1024$ 通りである。

(1) 白玉をまだもらっていない移動列だけを追う。1 回目以後、白玉を避けながら進むには、位置は

$$1\text{回目} : \pm 1, \quad 2\text{回目} : \pm 2, \quad 3\text{回目} : \pm 1, \quad 4\text{回目} : \pm 2, \quad \dots$$

と交互に限られる。したがって 9 回目終了時に白玉を一度ももらっていない位置は ± 1 の 2 通りである。10 回目に初めて白玉をもらうには、そこから原点へ移動するしかない。よって有利な移動列は 2 通りであり、確率は $\frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{512}$ である。

(2) 2 回目で初めて白玉をもらうには、1 回目に $+1$ または -1 に行き、2 回目に原点へ戻る必要がある。その後 8 回は白玉をもらってはならない。

原点から出発して白玉を 8 回避ける動きは、上と同じ理由で常に 2 通りである。ただし 2 回目に原点へ来た直後から見れば、3 回目以降の 8 回で白玉を避ける列は、正負それぞれに交互に動く 2 通りである。2 回目までの戻り方も 2 通りなので、有利な列は $2 \cdot 2 = 4$ 通りである。よって確率は $\frac{4}{2^{10}} = \frac{1}{256}$ である。

(3) 時刻 n に位置 p 、白玉数 k である移動列の数を $N_n(p, k)$ とする。初期値は

$$N_0(0, 0) = 1$$

であり、それ以外は 0 である。位置 q へ移ったとき白玉をもらうかどうかを

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} 1 & (q \in W), \\ 0 & (q \notin W) \end{cases}$$

と書けば、更新式は

$$N_{n+1}(q, k) = N_n(q-1, k - \varepsilon(q)) + N_n(q+1, k - \varepsilon(q)) \quad (1)$$

である。

式 (1) を順に用い、位置 p について足した個数をまとめると次の表になる。

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	合計
6	2	18	36	8	0	0	64
7	2	22	64	40	0	0	128
8	2	26	100	112	16	0	256
9	2	30	144	240	96	0	512
10	2	34	196	440	320	32	1024

各行の合計が 2^n であるため、すべての移動列が重複なく数えられている。したがって白玉が 1 個である移動列は 34 通りである。よって

$$\Pr(\text{白玉 1 個}) = \frac{34}{2^{10}} = \frac{17}{512}$$

である。

(4) 同じ表から、白玉が 2 個である移動列は 196 通りである。したがって

$$\Pr(\text{白玉 2 個}) = \frac{196}{2^{10}} = \frac{49}{256}$$

である。

【総評】 難度 7、目安 28 分。(1)(2) は白玉を避ける経路が正負各 1 通りに固定されることを見抜けば得点しやすい。(3)(4) の中心は、位置だけでなく既得白玉数も状態に含めた更新式である。白玉判定は移動後に行うこと、原点だけでなく $\pm 3, \pm 6, \pm 9$ も含めることが典型的な失点箇所である。答案では初期値、更新式、最終表を示し、各行の合計が 2^n になる検算を添えると 34 通り・196 通りが単なる結果の提示にならない。

【第 3 問】

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次式により定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- すべての n に対して、 xy 平面上の点 (a_n, b_n) が双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ の上にあることを証明せよ。
- r, s, t は正の実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} r & -r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が次の関係式を満たすとする。

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

このとき、 r, s, t を求めよ。

- 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は成分漸化式を代入して $a_n^2 - 2b_n^2$ が不変であることを示す。(2) は A の 2 本の列ベクトルが変換後も同じ向きになることを利用し、成分比較で r, s, t を決める。(3) は $a_n \pm \sqrt{2}b_n$ を作ると、それぞれ公比 $3 \pm 2\sqrt{2}$ の等比数列になることを示し、2 式の和と差から一般項を取り出す。

【解答】

(1) 漸化式を成分で書くと $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ である。したがって $a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (3a_n + 4b_n)^2 - 2(2a_n + 3b_n)^2 = 9a_n^2 + 24a_nb_n + 16b_n^2 - 8a_n^2 - 24a_nb_n - 18b_n^2 = a_n^2 - 2b_n^2$ である。初期値は $a_1 = 2, b_1 = 0$ だから $a_1^2 - 2b_1^2 = 4$ である。よって帰納的に、すべての n で $a_n^2 - 2b_n^2 = 4$ が成り立ち、点 (a_n, b_n) は双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ 上にある。

(2) A の 2 つの列ベクトルは

$$\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。行列

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について、関係式は

$$M \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix}$$

を意味する。

1 つ目から

$$\begin{pmatrix} 3r + 4 \\ 2r + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix}$$

である。したがって $s = 2r + 3$, $3r + 4 = rs$ であり、代入して $3r + 4 = r(2r + 3)$ すなわち $r^2 = 2$ を得る。 $r > 0$ より $r = \sqrt{2}$ である。よって $s = 3 + 2\sqrt{2}$ である。同様に 2 つ目から $t = 3 - 2\sqrt{2}$ を得る。

(3) (2) の計算は、量 $a_n + \sqrt{2}b_n$, $a_n - \sqrt{2}b_n$ がそれぞれ一定倍されることを表している。実際、漸化式から $a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1} = (3 + 2\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2}b_n)$ であり、 $a_{n+1} - \sqrt{2}b_{n+1} = (3 - 2\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2}b_n)$ である。初期値より

$$a_1 + \sqrt{2}b_1 = a_1 - \sqrt{2}b_1 = 2$$

だから

$$\begin{aligned} a_n + \sqrt{2}b_n &= 2(3 + 2\sqrt{2})^{n-1}, \\ a_n - \sqrt{2}b_n &= 2(3 - 2\sqrt{2})^{n-1}. \end{aligned}$$

2 式を足し引きして

$$\begin{aligned} a_n &= (3 + 2\sqrt{2})^{n-1} + (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}, \\ b_n &= \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} - (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

を得る。

▶ 解法 2 (2 階漸化式)

【方針】

(1)(2) は保存量と指定行列の列ベクトルを直接調べる。(3) では 1 次の連立漸化式から b_n を消去し、 a_n と b_n がともに $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$ を満たすことを示す。特性方程式の 2 解と初期値 $(a_1, a_2) = (2, 6)$ 、 $(b_1, b_2) = (0, 4)$ から一般項を決定する。

【解答】

(1) 成分漸化式は

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$$

である。したがって

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 &= (3a_n + 4b_n)^2 - 2(2a_n + 3b_n)^2 \\ &= a_n^2 - 2b_n^2. \end{aligned}$$

初期値では $a_1^2 - 2b_1^2 = 4$ なので、すべての n について

$$a_n^2 - 2b_n^2 = 4$$

である。よって (a_n, b_n) は双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ 上にある。

(2)

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく。条件 $A^{-1}MA = \text{diag}(s, t)$ は

$$M \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix}$$

を意味する。第 1 式から $s = 2r + 3$ 、 $3r + 4 = rs$ を得るので

$$r^2 = 2.$$

$r > 0$ より $r = \sqrt{2}$ 、したがって $s = 3 + 2\sqrt{2}$ である。第 2 式も同様に計算して $t = 3 - 2\sqrt{2}$ を得る。よって

$$r = \sqrt{2}, \quad s = 3 + 2\sqrt{2}, \quad t = 3 - 2\sqrt{2}.$$

(3) 第 1 式を 1 つ進めると

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + 4b_{n+1} \\ &= 3a_{n+1} + 4(2a_n + 3b_n). \end{aligned}$$

ここで $4b_n = a_{n+1} - 3a_n$ を代入すると

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n. \quad (1)$$

同様に

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - b_n \quad (2)$$

である。(1)、(2) の特性方程式

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

の解は $3 \pm 2\sqrt{2}$ である。

$a_1 = 2, a_2 = 6, b_1 = 0, b_2 = 4$ を用いて係数を決めると

$$\begin{aligned} a_n &= (3 + 2\sqrt{2})^{n-1} + (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}, \\ b_n &= \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} - (3 - 2\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。

【総評】 難度 6、目安 24 分。(1) の保存量と (2) の指定された基底が、(3) の一般項へつながる構成である。 $a_n \pm \sqrt{2}b_n$ を作る方法が最短だが、連立式から 2 階漸化式を作る別解も有効である。(2) で A の列ベクトルの順序を入れ替えて s, t を逆にすること、 b_n の一般項で分母 $\sqrt{2}$ を落とすことが典型ミスである。初期値 $n=1$ と $n=2$ を最後に代入して検算すれば、係数と指数 $n-1$ の誤りを防げる。

【第 4 問】

α を $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし、数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & (\theta_n \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ \theta_n - \alpha & (\theta_n > \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) x_3 が最大となる α を求めよ。
- (2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が最大となる α と、その極限値を求めよ。

【方針】

(1) は $x_3 = \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ を求め、端点も含めて微分で最大を判定する。(2) は $\alpha = \pi/4$ のとき、 θ_n が途中から $3\pi/4, \pi/2$ を交互に取ることを確認し、2 項ずつ等比級数にまとめる。(3) は $\alpha > \pi/4$ で $\alpha, 2\alpha$ の 2 周期になるため極限を明示して最大化する。 $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ は最初の項だけを鋭く評価した上界が $\sqrt{3}$ 未満であることを示して排除する。

【解答】

(1) $\theta_1 = 0$ であり、 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ だから $\theta_2 = \alpha$, $\theta_3 = 2\alpha$ である。したがって $x_3 = \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ である。これを $f(\alpha)$ とおくと $f'(\alpha) = \cos \alpha + \cos 2\alpha$ である。 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ で $\cos \alpha + \cos 2\alpha = 0$ を解くと $2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$ より $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ である。したがって $\alpha = \frac{\pi}{3}$ である。端点では $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$ であり、 $f(\pi/3) = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/4$ なので、最大となるのは $\alpha = \frac{\pi}{3}$ である。

(2) $\alpha = \pi/4$ のとき

$$\theta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_4 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_5 = \frac{\pi}{2}$$

となり、その後は $\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ を繰り返す。したがって

$$\sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \theta_3 = 1, \quad \sin \theta_n = 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \quad (n \geq 3)$$

である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{2m+2}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2^{2m+3}} \cdot 1 \right\}$$

である。等比級数を計算すると

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/4}{1-1/4} + \frac{1/8}{1-1/4} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$$

である。

(3) まず $\pi/4 < \alpha \leq \pi/2$ の場合を考える。このとき $\theta_2 = \alpha > 0$, $\theta_3 = 2\alpha > \frac{\pi}{2}$ であり、その後は $\alpha, 2\alpha$ を交互に繰り返す。したがって極限値を $X(\alpha)$ とすると

$$X(\alpha) = \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{1}{8} \sin 2\alpha + \dots$$

$= \frac{4}{3} \sin \alpha + \frac{2}{3} \sin 2\alpha$ である。微分すると $X'(\alpha) = \frac{4}{3}(\cos \alpha + \cos 2\alpha)$ であり、(1) と同じく $\alpha = \pi/3$ で最大となる。このとき

$$X\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

である。

次に $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ の場合を考える。この範囲では $\sin \theta_2 = \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、それ以後の各 $\sin \theta_n$ は高々 1 である。したがって

$$X(\alpha) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。ここで

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2} < 3$$

である。最後の不等式は $\sqrt{2} < 3/2$ から従う。両辺は正なので

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}.$$

したがって、この範囲では $\sqrt{3}$ に達しない。

以上より、極限値が最大となるのは $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であり、その最大値は $\sqrt{3}$ である。

【総評】 難度 8、目安 32 分。配点の中心は、 θ_n の動きを α の範囲で分け、無限和を 2 周期の等比級数に落とすことにある。(1) の微分と端点確認、(2) の周期開始位置は確実に書きたい。(3) では $\alpha > \pi/4$ の式だけを最大化して終わると、残りの範囲の排除が欠ける。 $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ では最初の項を $\sqrt{2}/2$ 、残りを 1 で抑える上界が有効である。添字と重み $1, 1/2, 1/4, \dots$ の対応を表にしてから和を書くと失点を防げる。

【第 5 問】

O を原点とする xy 平面上の曲線 $y = e^{-x} |\sin x|$ ($x \geq 0$) を C とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ の範囲で y が最大となる曲線 C 上の点を P_n とする。このとき、点 P_n の座標を求めよ。
- (2) 点 P_n から x 軸に下ろした垂線を $P_n H_n$ とし、三角形 $OP_n H_n$ の面積を S_n とするとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。
- (3) 曲線 C と線分 OP_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

【方針】

各区間で $u = x - (n-1)\pi$ とおき、定数倍を除いた $e^{-u} \sin u$ を微分して各山の最大点を求める。(2) は $S_n = X_n Y_n / 2$ を書き、 $r = e^{-\pi}$ として $\sum r^m$ 、 $\sum m r^m$ に分ける。(3) は $0 \leq x \leq \pi/4$ で曲線が線分 OP_1 より上にあることを接点と図で確認し、円環断面の体積を積分する。指数・三角関数部分と直線の二乗を別々に原始関数まで計算する。

【解答】

(1) $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ で $u = x - (n-1)\pi$ とおくと、 $0 \leq u \leq \pi$ であり、 $|\sin x| = \sin u$ である。したがって $y = e^{-(n-1)\pi} e^{-u} \sin u$ である。定数倍を除いて $g(u) = e^{-u} \sin u$ を最大化すればよい。

微分すると $g'(u) = e^{-u}(\cos u - \sin u)$ である。 $0 < u < \pi$ で最大となるのは $\cos u = \sin u$ すなわち $u = \frac{\pi}{4}$ のときである。よって

$$P_n = \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(n-1)\pi - \pi/4} \right)$$

である。

(2) 点 P_n の座標を (X_n, Y_n) とすると $S_n = \frac{1}{2} X_n Y_n$ である。したがって

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{4} \right) e^{-(n-1)\pi - \pi/4}$$

である。 $r = e^{-\pi}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi e^{-\pi/4}}{2\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{4} \right) r^m$$

である。ここで

$$\sum_{m=0}^{\infty} r^m = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} m r^m = \frac{r}{(1-r)^2}$$

だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi e^{-\pi/4}}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{e^{-\pi}}{(1-e^{-\pi})^2} + \frac{1}{4(1-e^{-\pi})} \right\}$$

である。

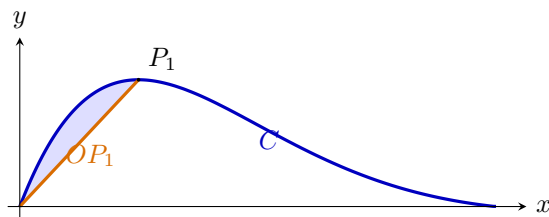
(3)

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}} \right)$$

であるから、線分 OP_1 の方程式は

$$y = \frac{4e^{-\pi/4}}{\pi\sqrt{2}} x \quad (1)$$

である。 $0 \leq x \leq \pi/4$ では曲線 $y = e^{-x} \sin x$ が (1) の上側にあり、両者は O, P_1 で一致する。



青色部分が曲線 C と線分 OP_1 で囲まれる領域である。

この領域を x 軸のまわりに回転するので、外半径は $e^{-x} \sin x$ 、内半径は (1) の右辺である。よって体積 V は

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \left\{ e^{-2x} \sin^2 x - \left(\frac{4e^{-\pi/4}}{\pi\sqrt{2}} x \right)^2 \right\} dx. \quad (2)$$

まず $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ より

$$\int e^{-2x} \sin^2 x dx = \frac{e^{-2x}}{8} (\cos 2x - \sin 2x - 2).$$

したがって

$$\int_0^{\pi/4} e^{-2x} \sin^2 x dx = \frac{1 - 3e^{-\pi/2}}{8}. \quad (3)$$

また

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4e^{-\pi/4}}{\pi\sqrt{2}} x \right)^2 dx &= \frac{8e^{-\pi/2}}{\pi^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi e^{-\pi/2}}{24}. \end{aligned} \quad (4)$$

(2)、(3)、(4) から

$$\begin{aligned} V &= \pi \left\{ \frac{1 - 3e^{-\pi/2}}{8} - \frac{\pi e^{-\pi/2}}{24} \right\} \\ &= \frac{\pi e^{-\pi/2}}{24} (3e^{\pi/2} - \pi - 9). \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、目安 30 分。(1) で各山の最大点が左端から常に $\pi/4$ の位置にあると示すことが後半の土台である。(2) は $(m+1/4)r^m$ を二つの標準的な等比級数へ分ける。(3) は曲線と線分の上下関係、回転断面の外半径・内半径、指数三角関数の積分が主要配点である。絶対値を外す区間を $[0, \pi/4]$ に限ること、体積で高さの差ではなく半径の二乗差を使うことが典型ミスである。積分を 2 項に分け、各定積分を別々に評価すると最終式の符号を検算しやすい。