

九州大学 2014 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

行列 $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, d を実数とする。行列 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $AT = TB$ かつ $ad - bc = 1$ を満たすとき、 b, c, d をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) xy 平面内の点 $P_n(\alpha_n, \beta_n)$ を

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で定める。ただし、 $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$ とする。このとき α_n および β_n を求めよ。また、点 P_n を通り、 $y = x$ で与えられる直線 l と直交する直線 m の方程式を求めよ。

(3) 直線 l と直線 m の交点を Q_n とし、 P_n と Q_n の距離を d_n とする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $AT = TB$ を成分比較し、 $c = a, d = -b$ まで出してから $ad - bc = 1$ で b, d を決める。(2) は $\alpha_n + \beta_n$ と $\alpha_n - \beta_n$ を考えると、行列 A による変化がそれぞれ 2 倍、 $1/2$ 倍になることを使う。これにより α_n, β_n を明示し、直線 m は傾き -1 で P_n を通る直線として求める。(3) は $l: y = x$ と m の交点を出し、2 点間距離の極限を取る。

【解答】

(1)

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。まず

$$AT = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5a + 3c & 5b + 3d \\ 3a + 5c & 3b + 5d \end{pmatrix}$$

である。一方

$$TB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2c & d/2 \end{pmatrix}$$

である。 $AT = TB$ より成分を比較すると $5a + 3c = 8a, \quad 5b + 3d = 2b, \quad 3a + 5c = 8c, \quad 3b + 5d = 2d$ である。これらから $c = a, \quad d = -b$ を得る。さらに $ad - bc = 1$ に $c = a, d = -b$ を代入すると $a(-b) - ba = -2ab = 1$ である。したがって $a \neq 0$ であり、 $b = -\frac{1}{2a}, \quad c = a, \quad d = \frac{1}{2a}$ である。よって $b = -\frac{1}{2a}, \quad c = a, \quad d = \frac{1}{2a}$ である。

(2)

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

より

$$\alpha_n = \frac{5\alpha_{n-1} + 3\beta_{n-1}}{4}, \quad \beta_n = \frac{3\alpha_{n-1} + 5\beta_{n-1}}{4}$$

である。和と差を取ると $\alpha_n + \beta_n = 2(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})$ であり、 $\alpha_n - \beta_n = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})$ である。初期値 $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$ から $\alpha_0 + \beta_0 = 1, \quad \alpha_0 - \beta_0 = 1$ なので $\alpha_n + \beta_n = 2^n, \quad \alpha_n - \beta_n = 2^{-n}$ である。したがって

$$\alpha_n = \frac{2^n + 2^{-n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{2^n - 2^{-n}}{2}$$

である。

直線 $l: y = x$ と直交する直線は傾き -1 である。点 $P_n(\alpha_n, \beta_n)$ を通るので $y - \beta_n = -(x - \alpha_n)$ すなわち $x + y = \alpha_n + \beta_n = 2^n$ である。よって $m: x + y = 2^n$ である。

(3)

直線 $l: y = x$ と $m: x + y = 2^n$ の交点 Q_n は $Q_n = (2^{n-1}, 2^{n-1})$ である。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_n P_n} &= \left(\frac{2^n + 2^{-n}}{2} - 2^{n-1}, \frac{2^n - 2^{-n}}{2} - 2^{n-1} \right) \\ &= (2^{-n-1}, -2^{-n-1})\end{aligned}$$

である。よって $d_n = \sqrt{(2^{-n-1})^2 + (-2^{-n-1})^2} = \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ である。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ である。

▶ 解法 2 ((1) を用いる行列分解)

【方針】

(1) で得た T のうち $a = 1/\sqrt{2}$ を選ぶと、列ベクトルの長さが 1 で互いに直交する行列になる。 $AT = TB$ から $A = TBT^{-1}$ 、したがって $A^n = TB^nT^{-1}$ として漸化式を一度に解く。最後は点と直線 $y = x$ の距離公式で極限を求める。

【解答】

(1) $AT = TB$ を成分比較すると $c = a, d = -b$ である。さらに $ad - bc = 1$ より $-2ab = 1$ だから

$$b = -\frac{1}{2a}, \quad c = a, \quad d = \frac{1}{2a}$$

である。

(2) $a = 1/\sqrt{2}$ を選べば

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。 $AT = TB$ より $A = TBT^{-1}$ だから

$$A^n = T B^n T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 2^{-n} & 2^n - 2^{-n} \\ 2^n - 2^{-n} & 2^n + 2^{-n} \end{pmatrix}$$

である。初期ベクトルは $(1, 0)^T$ なので

$$\alpha_n = \frac{2^n + 2^{-n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{2^n - 2^{-n}}{2}$$

を得る。また P_n を通り $y = x$ と直交する直線は

$$m: x + y = \alpha_n + \beta_n = 2^n$$

である。

(3) Q_n は P_n から直線 $y = x$ へ下ろした垂線の足である。よって点と直線の距離公式から

$$d_n = \frac{|\alpha_n - \beta_n|}{\sqrt{2}} = \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 20 分。行列の成分比較と、和・差への変換を組み合わせる問題である。(1) は $AT = TB$ から $c = a, d = -b$ が出るので、最後に行列式条件で b を決めればよい。(2) では $\alpha_n \pm \beta_n$ を作ると漸化式が一気に分離し、計算が短くなる。直線 m は傾きで考えるより、 $x + y = \alpha_n + \beta_n$ とまとめると (3) の交点もすぐ出る。距離計算では差が 2^{-n-1} になる点を丁寧に確認したい。第 2 解法では (1) の行列 T を実際に用いて A の累乗を計算し、距離公式で結論を得た。

【第 2 問】

箱の中に、赤玉が 5 個、青玉が 4 個、白玉が 3 個入っている。それぞれの玉の大きさは同じで、1 個あたりの重さは、赤玉が 100g、青玉が 45g、白玉が 30g である。このとき以下の問いに答えよ。ただし、取り出した玉は重さを量ったあとで、箱の中にもどすものとする。

- (1) 無作為に箱から玉を 1 個取り出して空の袋に入れ、重さを量ったとする。このとき袋の中身の重さが 40g 以上であるという条件のもとで、袋の中身が赤玉である確率を求めよ。
- (2) 無作為に箱から玉を 2 個取り出して空の袋に入れ、重さを量ったとする。このとき袋の中身の重さが 100g 以上であるという条件のもとで、袋の中身が 2 個とも赤玉である確率を求めよ。
- (3) 無作為に箱から玉を 3 個取り出して空の袋に入れ、重さを量ったとする。このとき袋の中身の重さが 150g 以上であるという条件のもとで、袋の中身が 3 個とも赤玉である確率を求めよ。

【方針】

条件付き確率なので、各問で「条件を満たす取り出し方の数」を分母、「その中で全て赤玉である取り出し方の数」を分子にする。取り出した玉は重さを量ったあとに戻すので、2 個・3 個は同時に取り出すものとして、組合せで数える。(1) は 40g 以上が赤または青、(2) は 2 個で 100g 以上となる組合せを色の組で分類する。(3) は 3 個で 150g 以上となる組合せを赤玉の個数ごとに分類する。

【解答】

(1)

1 個取り出したとき、重さが 40g 以上であるのは赤玉 100g または青玉 45g の場合である。白玉 30g は条件を満たさない。したがって条件を満たす玉は $5 + 4 = 9$ 個であり、そのうち赤玉は 5 個である。よって求める条件付き確率は $\frac{5}{9}$ である。

(2)

2 個を同時に取り出す。重さが 100g 以上となる色の組を数える。

赤赤は 200g で条件を満たし、場合の数は ${}_5C_2 = 10$ である。赤青は 145g で条件を満たし、場合の数は $5 \cdot 4 = 20$ である。赤白は 130g で条件を満たし、場合の数は $5 \cdot 3 = 15$ である。一方、青青は 90g、青白は 75g、白白は 60g で、いずれも 100g 以上ではない。

したがって、条件を満たす取り出し方は $10 + 20 + 15 = 45$ 通りであり、そのうち 2 個とも赤玉である場合は 10 通りである。よって $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$ である。

(3)

3 個を同時に取り出す。重さが 150g 以上となる場合を、赤玉の個数で分ける。

赤玉が 3 個のときは必ず条件を満たし、場合の数は ${}_5C_3 = 10$ である。赤玉が 2 個のときも、残り 1 個が青でも白でも重さは 150g 以上である。場合の数は

$${}_5C_2({}_4C_1 + {}_3C_1) = 10(4 + 3) = 70$$

である。

赤玉が 1 個のとき、残り 2 個が青青、青白、白白のいずれでも $100 + 45 + 45 = 190$, $100 + 45 + 30 = 175$, $100 + 30 + 30 = 160$ となり、すべて 150g 以上である。場合の数は

$${}_5C_1({}_4C_2 + {}_4C_{13}C_1 + {}_3C_2) = 5(6 + 12 + 3) = 105$$

である。

赤玉が 0 個のとき、最大でも青青青で $45 \cdot 3 = 135$ g なので条件を満たさない。したがって、条件を満たす取り出し方は $10 + 70 + 105 = 185$ 通りである。そのうち 3 個とも赤玉である場合は 10 通りだから、求める確率は $\frac{10}{185} = \frac{2}{37}$ である。

【総評】 難度 4、計算量 4。目安時間は 15 分。条件付き確率の分母を「全体の取り出し方」ではなく「指定された重さ以上になる取り出し方」にするのが要点である。2 個・3 個は同時に取り出すので、順序を区別せず組合せで数える。特に (3) では赤玉 1 個でも白白を加えて 160g となり条件を満たすため、ここを落とすと分母が小さくなる。各色の組を重さの場合の数で並べると、数え漏れを防げる。

【第 3 問】

a を正の定数, 関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = xe^x$, $g(x) = ax$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが $0 < x < 1$ の範囲において交点を持つための a の範囲を求めよ。

(2)

$$h(a) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

とおく。 $h(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

【方針】

(1) は $0 < x < 1$ で $x > 0$ だから、交点条件を $e^x = a$ に直して値域を見る。(2) は $h(a)$ を重み x 付きの絶対偏差と見る。 $a \leq 1$ では減少、 $a \geq e$ では増加するので、最小は $1 < a < e$ にある。符号が変わる点 $u = \log a$ で積分を分け、境界項が 0 になることを確かめて微分し、左右の重みが等しくなる条件を解く。

【解答】

(1) $0 < x < 1$ で交点をもつなら

$$xe^x = ax$$

である。 $x > 0$ だから両辺を x で割ると $e^x = a$ となる。 $0 < x < 1$ における e^x の値域は $1 < e^x < e$ なので

$$1 < a < e$$

である。

(2)

$$h(a) = \int_0^1 x|e^x - a| dx$$

である。 $0 < a \leq 1$ では全区間で $e^x > a$ だから $h(a)$ は a の増加とともに減少する。 $a \geq e$ では全区間で $e^x \leq a$ だから $h(a)$ は増加する。したがって最小値を与える a は $1 < a < e$ にある。

$u = \log a$ とおけば $0 < u < 1$, $e^u = a$ であり、

$$h(a) = \int_0^u x(a - e^x) dx + \int_u^1 x(e^x - a) dx$$

となる。 a で微分すると、積分区間の端 $x = u$ では $a - e^u = 0$ なので境界項は消える。よって

$$\begin{aligned} h'(a) &= \int_0^u x dx - \int_u^1 x dx \\ &= \frac{u^2}{2} - \frac{1 - u^2}{2} \\ &= u^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $u = \log a$ は a とともに増加するので、 $h'(a)$ は $u = 1/\sqrt{2}$ の前で負、後で正となる。したがって $h(a)$ を最小にするのは

$$\log a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a = e^{1/\sqrt{2}}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。(1) は範囲が $0 < x < 1$ なので x で割れる。(2) は絶対値の符号が変わる $u = \log a$ で積分を分ける。微分時には、移動する端点で被積分関数が 0 になるため境界項が消えることを書けば、左右の重みが等しいという最小条件の理由が明確になる。端の範囲 $a \leq 1$ 、 $a \geq e$ の単調性も先に確認する。

【第 4 問】

xy 平面において半径 r の円を考える。この円の中心 O は、時刻 $t = 0$ において点 $(0, r)$ にあり、一定の速さ ar (ただし $a > 0$) で x 軸の正の方向に移動する。同時に、この円は中心 O のまわりを単位時間当たり 1 ラジアン割合で時計まわりに連続的に回転する。時刻 $t = 0$ において原点 $(0, 0)$ にあった円周上の定点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 $(x(t), y(t))$ を a, r, t を用いて表せ。
- (2) $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、以下の (i), (ii) それぞれの場合について、点 P の軌跡 C の概形を図示し、 $x(t), y(t)$ の最大値と最小値、および C と x 軸との共有点の x 座標を求め、図の中に記入せよ。
 - (i) $a = 1$
 - (ii) $a = \frac{1}{2}$
- (3) $a = \frac{1}{2}$ の場合について、 C と x 軸によって囲まれる領域の面積を求めよ。

【方針】

中心の移動 (art, r) と、中心から見た点 P の時計回りの回転を合成して媒介変数表示を作る。(2) は $x'(t) = r(a - \cos t)$ と $y(t) = r(1 - \cos t)$ から増減・極値・軸との交点を求め、2 つの軌跡を図示する。(3) は曲線と x 軸を一周する向き付き面積として計算する。左右へ戻る部分があるため、水平増分の絶対値を取って各片を足すと同じ領域を重複させる点に注意する。

【解答】

(1) 時刻 t の中心は (art, r) である。中心から見た P の初期位置は $(0, -r)$ であり、これを時計回りに角 t だけ回転すると $(-r \sin t, -r \cos t)$ になる。したがって

$$x(t) = r(at - \sin t), \quad y(t) = r(1 - \cos t)$$

である。

(2)

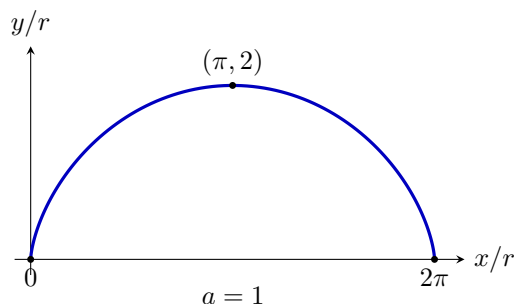
(i) $a = 1$ のとき

$$x'(t) = r(1 - \cos t) \geq 0$$

だから、 $x(t)$ は $0 \leq t \leq 2\pi$ で単調に増加する。また $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$ である。よって

$$x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = 2\pi r, \quad y_{\min} = 0, \quad y_{\max} = 2r$$

である。 $y = 0$ となるのは $t = 0, 2\pi$ なので、 x 軸との共有点の x 座標は $0, 2\pi r$ である。



(ii) $a = 1/2$ のとき

$$x'(t) = r \left(\frac{1}{2} - \cos t \right)$$

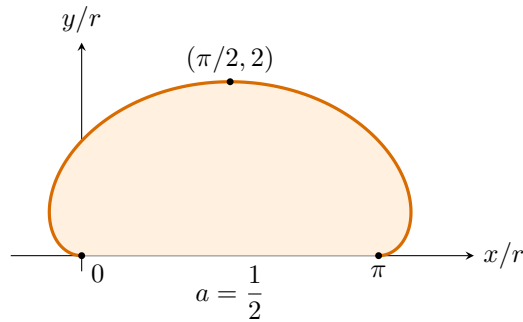
であり、 $x'(t) = 0$ となるのは $t = \pi/3, 5\pi/3$ である。符号を調べると、前者で最小、後者で最大をとる。したがって

$$x_{\min} = r \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad x_{\max} = r \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。 $y(t)$ は (i) と同じなので

$$y_{\min} = 0, \quad y_{\max} = 2r$$

である。 x 軸との共有点の x 座標は、 $t = 0, 2\pi$ を代入して $0, \pi r$ である。



(3) $a = 1/2$ の曲線を $t = 0$ から 2π までたどり、 x 軸上を始点まで戻ると閉曲線になる。 x 軸上では $y = 0$ だから、囲まれる面積は

$$S = \left| \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt \right|$$

である。ここで

$$y(t) = r(1 - \cos t), \quad x'(t) = r \left(\frac{1}{2} - \cos t \right)$$

なので

$$\begin{aligned} S &= r^2 \left| \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \left(\frac{1}{2} - \cos t \right) dt \right| \\ &= r^2 \left| \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos t + \cos^2 t \right) dt \right| \\ &= r^2 |\pi + 0 + \pi| \\ &= 2\pi r^2 \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 30 分。中心の平行移動と時計回りの回転を合成するのが第一の採点点である。(2) は x の増減点、 y の最大点、軸との共有点を数値と図の双方で一致させる。 $a = 1/2$ では軌跡が始点より左、終点より右へ張り出すので、図なしでは面積の向きを誤りやすい。(3) は閉曲線の向き付き面積を使い、正弦・余弦の一周期積分を丁寧に代入する。

【第 5 問】

すべての実数 x について、関数 $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ が微分可能であり、 $f'(x) > 0$ かつ $f''(x) > 0$ が満たされるとする。また、 $f(-2) < 0$ かつ $f(2) > 0$ であるとし、 $f(x) = 0$ の解を a とする。 $f(x)$ を用いて、数列 $\{x_n\}$ を次のように定義する。

- $x_1 = 2$
- x_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) は、曲線 $y = f(x)$ の $x = x_{n-1}$ における接線と x 軸との交点の x 座標とする。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) $x_n > a$ ならば以下の不等式が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ。

$$f'(a) < \frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} < f'(x_n)$$

(2) $x_n > a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となることを示せ。

【方針】

接線と x 軸の交点の定義から、反復式 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ をまず書く。 $f' > 0$ より f は増加するので零点 a は一意であり、 $x_1 = 2 > a$ である。(1) は $[a, x_n]$ に平均値の定理を適用し、 $f'' > 0$ から f' が増加することを使う。(2) は (1) の上側評価から $x_{n+1} > a$ を帰納的に示す。(3) は (1) の下側評価を変形する。(4) は x_n が a より大きく単調減少して下に有界であることから極限を持ち、反復式に極限を入れて零点の一意性へ帰着する。

【解答】

まず、 $f'(x) > 0$ なので $f(x)$ は単調に増加する。 $f(-2) < 0$ 、 $f(2) > 0$ だから、方程式 $f(x) = 0$ は $-2 < a < 2$ にただ 1 つの解 a をもつ。

接線の方程式から反復式を求める。曲線 $y = f(x)$ の $x = x_n$ における接線は $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ である。これと x 軸との交点では $y = 0$ だから $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$ である。したがって $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ であり、同時に $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$ である。

(1) $x_n > a$ とする。 $[a, x_n]$ で平均値の定理を用いると、ある ξ が $a < \xi < x_n$ に存在して $\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(\xi)$ となる。 $f(a) = 0$ なので $\frac{f(x_n)}{x_n - a} = f'(\xi)$ である。

また $f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調に増加する。したがって $f'(a) < f'(\xi) < f'(x_n)$ である。ここに $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$ を代入すると $f'(a) < \frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} < f'(x_n)$ が得られる。

(2)

数学的帰納法で示す。まず $x_1 = 2$ であり、 $-2 < a < 2$ だから $x_1 > a$ である。

次に $x_n > a$ と仮定する。(1) の右側の不等式から $\frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} < f'(x_n)$ である。 $f'(x_n) > 0$ なので割って $x_n - x_{n+1} < x_n - a$ を得る。したがって $x_{n+1} > a$ である。よって帰納法により $x_n > a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。

(3)

(1) の左側の不等式から $\frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} > f'(a)$ である。 $f'(x_n) > 0$ で割ると $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - a} > \frac{f'(a)}{f'(x_n)}$ である。左辺を $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - a} = 1 - \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a}$ と書き直すと $1 - \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} > \frac{f'(a)}{f'(x_n)}$ である。したがって $\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)}$ を得る。

(4)

(2) より、すべての n で $x_n > a$ である。このとき $f(x_n) > 0$ であり、 $f'(x_n) > 0$ なので $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$ である。したがって $\{x_n\}$ は単調減少で、下に a で有界である。よって極限をもつ。これを $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ とおくと、 $L \geq a$ である。

反復式 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ の両辺で極限をとる。 f と f' は連続で、 $f'(L) > 0$ だから $L = L - \frac{f(L)}{f'(L)}$ である。したがって $f(L) = 0$ である。 $f(x) = 0$ の解は a だけ 1 つなので $L = a$ である。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ が示された。

【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 28 分。接線で次の近似値を作る反復を、平均値の定理と凸性で評価する問題である。最初に接線の交点から $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ を出しておくと、全小問が同じ式でつながる。(1) は $[a, x_n]$ に平均値の定理を使い、 $f'' > 0$ から f' が増加することを挟み撃ちを使う。(2)(3) は (1) の不等式の変形であり、分母が正であることを確認しながら進めたい。(4) は単調減少かつ下に有界という収束の枠組みを作り、最後に零点の一意性で極限を決める。