

九州大学 2014 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数 $f(x) = x - \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが $\frac{1}{2}$ となるものを l とする。

(1) l の方程式と接点の座標 (a, b) を求めよ。

(2) a は (1) で求めたものとする。曲線 $y = f(x)$, 直線 $x = a$, および x 軸で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

【方針】

接線の傾きは $f'(x) = 1 - \cos x$ なので、傾きが $(1/2)$ となる接点を範囲内で決める。接線は点傾きの形で書く。(2) は $0 \leq x \leq a$ で $x - \sin x \geq 0$ を確認し、円板法で体積を表す。積分は x^2 , $x \sin x$, $\sin^2 x$ に分け、部分積分と半角公式を使う。

【解答】

(1) $f(x) = x - \sin x$ より $f'(x) = 1 - \cos x$ である。接線の傾きが $1/2$ となる接点の x 座標を a とすると $1 - \cos a = \frac{1}{2}$ である。したがって $\cos a = \frac{1}{2}$ であり、 $0 \leq a \leq \pi/2$ だから $a = \frac{\pi}{3}$ である。このとき $b = f(a) = \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。よって接点は $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

接線 l は傾き $1/2$ でこの点を通るから

$$y - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

である。整理すれば $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(2) $0 \leq x \leq \pi/3$ では $\sin x \leq x$ なので $f(x) = x - \sin x \geq 0$ である。したがって、求める回転体の体積は、半径 $f(x)$ の円板を積み重ねて

$$V = \pi \int_0^{\pi/3} (x - \sin x)^2 dx$$

である。

積分を計算する。 $(x - \sin x)^2 = x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x$ である。まず

$$\int_0^{\pi/3} x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 = \frac{\pi^3}{81}$$

である。また部分積分より

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$$

だから

$$\int_0^{\pi/3} x \sin x dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。さらに $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ より

$$\int_0^{\pi/3} \sin^2 x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (x - \sin x)^2 dx &= \frac{\pi^3}{81} - 2 \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{\pi^3}{81} + \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。よって

$$V = \pi \left(\frac{\pi^3}{81} + \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8} \right)$$

である。分母をそろえれば $V = \frac{\pi}{648} (8\pi^3 + 324\pi - 729\sqrt{3})$ とも書ける。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 18 分。接線条件は導関数からすぐに決まるが、体積計算では積分を丁寧に分ける必要がある。 $0 \leq x \leq \pi/3$ で $x - \sin x \geq 0$ であるため、回転半径をそのまま $f(x)$ としてよい。

$$\int x \sin x \, dx$$

の部分積分と $\sin^2 x$ の半角公式が計算の中心で、符号ミスが出やすい。最後に接線の方程式と接点、体積の両方を明示することが大切である。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の自然数 a に対し、 a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、 a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。
- (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

【方針】

(1) は自然数を 3 で割った余りで分類し、平方したときの余りを直接調べる。(2) では $a^2 + b^2 = 3c^2$ を 3 で割った余りで見て、 a^2, b^2 がともに 3 の倍数でなければならないことを示す。さらに $a = 3a_1, b = 3b_1$ とおくと c^2 も 3 の倍数になり、 c も 3 で割り切れる。(3) はもし解があれば (2) を繰り返せるので、自然数が 3 で無限に割り切れるという矛盾を出す。

【解答】

(1)

自然数 a を 3 で割った余りは 0, 1, 2 のいずれかである。それぞれの場合に平方の余りを調べると $0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ である。したがって、任意の自然数 a について、 a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

(2) $a^2 + b^2 = 3c^2$ が成り立つとする。右辺は 3 の倍数なので $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ である。(1) より、 a^2 と b^2 の 3 で割った余りはそれぞれ 0 または 1 である。2 つの余りの和が 3 で割って 0 になるには $a^2 \equiv 0, b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ でなければならない。よって a, b はともに 3 で割り切れる。

そこで $a = 3a_1, b = 3b_1$ とおく。もとの式に代入すると $9a_1^2 + 9b_1^2 = 3c^2$ であり、両辺を 3 で割って $3a_1^2 + 3b_1^2 = c^2$ を得る。したがって c^2 は 3 で割り切れる。(1) の結果から、平方が 3 で割り切れるならもとの数も 3 で割り切れるので、 c も 3 で割り切れる。

以上より、 a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定する。(2) より、 a, b, c はすべて 3 で割り切れる。そこで $a = 3a_1, b = 3b_1, c = 3c_1$ とおくと、代入して $9a_1^2 + 9b_1^2 = 27c_1^2$ となる。両辺を 9 で割ると $a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2$ であり、 (a_1, b_1, c_1) も同じ形の自然数解である。

すると再び (2) を適用できるので、 a_1, b_1, c_1 もすべて 3 で割り切れる。これを繰り返すと、最初の a, b, c は 3 で何回でも割り切れることになる。しかし正の自然数は、3 で割れる回数が有限である。これは矛盾である。

したがって $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないである。

【総評】 難度 4、計算量 3。目安時間は 12 分。平方数の 3 での余りが 0 か 1 に限られることを出発点に、割り切れ条件を 3 つの変数へ広げる問題である。(2) で a, b だけでなく c まで 3 で割り切れることを示すのが核心で、ここを省くと (3) の無限降下に進めない。(3) は「同じ形のより小さい自然数解」が繰り返してできる、という構造を明確に書くとよい。余りの和が 0 になる場合を丁寧に確認することが採点点である。

【第 3 問】

座標平面上的楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \dots\dots\dots (A)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 (A) と直線 $y = x + a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。
- (2) $|x| + |y| = 1$ を満たす点 (x, y) 全体がなす図形の概形をかけ。
- (3) 点 (x, y) が楕円 (A) 上を動くとき、 $|x| + |y|$ の最大値、最小値とそれを与える (x, y) をそれぞれ求めよ。

【方針】

楕円を $x = -2 + 4 \cos \theta, y = 1 + 2 \sin \theta$ とおく。(1) は $a = y - x$ の値域を求める。(2) は絶対値を象限ごとに外して 4 本の線分を描く。(3) の最大値は、4 つの一次式 $pmx \pm y$ の楕円上での最大値を比較する。最小値は、原点中心のひし形 $|x| + |y| \leq c$ を広げ、楕円に初めて触れる c を求める。候補 $c = \sqrt{3} - 1$ のひし形全体が楕円内部にあることを、凸な 2 次式の頂点値で証明する。

【解答】

(1) 楕円は

$$x = -2 + 4 \cos \theta, \quad y = 1 + 2 \sin \theta$$

と表せる。直線 $y = x + a$ との交点では

$$a = y - x = 3 + 2 \sin \theta - 4 \cos \theta$$

である。 $2 \sin \theta - 4 \cos \theta$ の振幅は $2\sqrt{5}$ だから

$$3 - 2\sqrt{5} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{5}$$

である。

(2) 各象限で絶対値を外すと、

$$x + y = 1, \quad -x + y = 1, \quad -x - y = 1, \quad x - y = 1$$

の各線分になる。したがって $((1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1))$ を頂点とするひし形である。

(3) まず最大値を求める。任意の点で

$$|x| + |y| = \max\{x + y, x - y, -x + y, -x - y\}$$

である。楕円上で $ux + vy$ の最大値は、媒介変数表示から

$$-2u + v + \sqrt{(4u)^2 + (2v)^2}$$

である。 $u, v \in \{1, -1\}$ を代入すると最大は $u = -1, v = 1$ のときで、

$$\max(|x| + |y|) = 3 + 2\sqrt{5}$$

となる。等号には

$$\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

が必要だから、その点は

$$\left(-2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

である。この点は第 2 象限にあり、実際に $|x| + |y| = -x + y$ となる。

次に最小値を求める。楕円を表す 2 次式を

$$F(x, y) = \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4}$$

とおく。 $c = \sqrt{3} - 1$ とし、ひし形

$$D_c = \{(x, y) : |x| + |y| \leq c\}$$

を考える。 F は凸な 2 次式なので、ひし形上の最大値は 4 頂点のいずれかでとる。各頂点で調べると

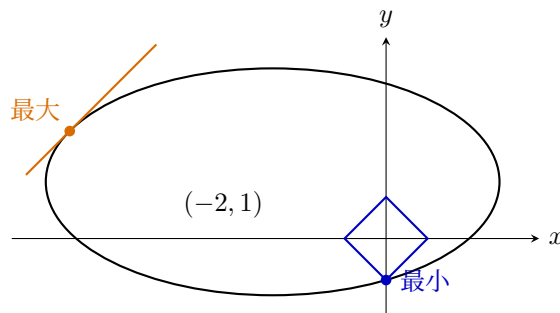
頂点	$F(x, y)$
$(c, 0)$	$\frac{(c+2)^2}{16} + \frac{1}{4} < 1$
$(-c, 0)$	$\frac{(2-c)^2}{16} + \frac{1}{4} < 1$
$(0, c)$	$\frac{1}{4} + \frac{(c-1)^2}{4} < 1$
$(0, -c)$	$\frac{1}{4} + \frac{(c+1)^2}{4} = 1$

である。最後の等号では $c+1 = \sqrt{3}$ を使った。よって D_c は楕円の内部に含まれ、その境界は $(0, -c) = (0, 1 - \sqrt{3})$ で楕円に接する。したがって楕円上では

$$|x| + |y| \geq c = \sqrt{3} - 1$$

であり、最小値は $\sqrt{3} - 1$ 、その点は $(0, 1 - \sqrt{3})$ である。

位置関係は次図のようになる。青い小ひし形が最小値、橙色の接線が最大値に対応する。



【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 28 分。(1) の $y - x$ の値域が (3) の最大値へつながる。(3) の最大値は 4 つの一次式を比較し、等号点に対応する象限にあることまで確認する。最小値は軸との交点だけを比較して終わると証明不足になりやすい。原点中心のひし形 $|x| + |y| \leq \sqrt{3} - 1$ 全体が楕円の内部にあることを示せば、下側の y 軸交点が真の最小点だと保証できる。図では最小のひし形と最大の支持直線に対応させた。

【第 4 問】

A さんは 5 円硬貨を 3 枚、B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお、表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし、硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて、以下の問いに答えよ。

- (1) A さんが B さんに勝つ確率 p ，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。
- (2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

A の表の枚数を $i = 0, 1, 2, 3$ とし、A の得点、場合の数、負けたときに残る金額をまとめる。B は 2 枚の硬貨の表裏 4 通りについて、得点と裏硬貨の金額を表にする。勝敗数はこの 2 つの表の組み合わせで数える。期待値は、各場合でゲーム終了後に A が持つ金額を計算して全 32 通りで平均する。別解として、A が勝てば B の裏硬貨を得て、A が負ければ A の裏硬貨を失う、という増減額で期待値を検算する。

【解答】

(1)

A さんの表の枚数を i とすると、A さんの表金額は $5i$ 円であり、そのような出方は ${}_3C_i$ 通りである。したがって A さん

側は

i	表金額	場合の数
0	0	1
1	5	3
2	10	3
3	15	1

である。

Bさんは5円硬貨と10円硬貨を1枚ずつ持っているので、表金額は0, 5, 10, 15の4通りであり、それぞれ1通りずつ起こる。全体の場合の数は $2^5 = 32$ 通りである。

Aさんが勝つ場合を数える。Aの表金額が5円のときは、Bが0円のときだけ勝つので3通り。Aが10円のときは、Bが0円または5円のとき勝つので $3 \cdot 2 = 6$ 通り。Aが15円のときは、Bが0円、5円、10円のとき勝つので3通りである。よって $\#\{A \text{ が勝つ}\} = 3 + 6 + 3 = 12$ であり、 $p = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ である。

引き分けは、AとBの表金額が等しい場合である。金額0, 5, 10, 15に対して場合の数はそれぞれ1, 3, 3, 1なので、合計 $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ 通りである。したがって $q = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ である。

(2)

ゲーム終了後にAさんが持つ金額を数える。Bさんの4通りについて、表金額と裏硬貨の合計金額は

Bの表金額	Bの裏硬貨の金額
0	15
5	10
10	5
15	0

である。

Aさんが勝つと、Aさんは自分の15円に加えてBさんの裏硬貨を得る。Aさんが負けると、Aさんは自分の裏硬貨を相手に渡すので、Aさんの手元には表が出た硬貨の金額だけが残る。引き分けなら硬貨のやりとりはなく、Aさんは15円のままである。

Aの表金額ごとに、Bの4通りに対するAの終了後金額の合計を出すと

Aの表金額	A側の場合の数	Bの4通りに対する終了後金額の合計
0	1	15
5	3	$30 + 15 + 5 + 5 = 55$
10	3	$30 + 25 + 15 + 10 = 80$
15	1	$30 + 25 + 20 + 15 = 90$

である。よって全32通りにおけるAさんの終了後金額の総和は $1 \cdot 15 + 3 \cdot 55 + 3 \cdot 80 + 1 \cdot 90 = 510$ である。したがって期待値は $E = \frac{510}{32} = \frac{255}{16}$ 円である。

▶ 解法 2 (増減額の期待値)

【方針】

勝敗の確率は解法 1 と同じく全 32 通りから数える。期待値は終了後の所持金を直接列挙せず、初めの 15 円に「A が勝って受け取る B の裏硬貨の期待額」を足し、「A が負けて渡す A の裏硬貨の期待額」を引く。B の出方、A の表枚数をそれぞれ固定すると、独立性を使って短く集計できる。

【解答】

(1) A の表金額は 0 円、5 円、10 円、15 円で、その場合の数は順に (1,3,3,1) 通りである。B の表金額は 0 円、5 円、10 円、15 円が各 1 通りである。したがって A が勝つ場合は

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 12 \text{ 通り}$$

であり、引き分けは (1+3+3+1=8) 通りである。全 32 通りは同様に確からしいから

$$p = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}, \quad q = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

である。

(2) A の初めの所持金は 15 円である。まず、A が勝って受け取る B の裏硬貨の期待額を求める。

B の表金額が 0 円の時、確率は (1/4)、裏硬貨は 15 円であり、A は少なくとも 1 枚が表なら勝つ。その確率は (7/8) である。B の表金額が 5 円の時、裏硬貨は 10 円で、A が勝つのは 3 枚中 2 枚以上が表のときだから確率は (4/8) である。B の表金額が 10 円の時、裏硬貨は 5 円で、A が勝つのは 3 枚すべてが表のときだから確率は (1/8) である。B の表金額が 15 円なら受取額は 0 円である。よって受取額の期待値は

$$15 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{8} + 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{150}{32}$$

円である。

次に、A が負けて渡す A の裏硬貨の期待額を求める。A の表が 0 枚、1 枚、2 枚のときの確率はそれぞれ (1/8, 3/8, 3/8)、裏硬貨の金額は 15 円、10 円、5 円である。このとき B に負ける確率はそれぞれ (3/4, 2/4, 1/4) である。A の表が 3 枚なら負けない。したがって支払額の期待値は

$$15 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} + 10 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{4} + 5 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{120}{32}$$

円である。

以上より、終了後の A の所持金の期待値は

$$E = 15 + \frac{150}{32} - \frac{120}{32} = \frac{255}{16} \text{ 円}$$

である。

【総評】 難度 4、計算量 5。目安時間は 18 分。確率自体は全 32 通りの有限な場合分けだが、硬貨のやりとりが「相手の裏硬貨」だけである点を読み違えると期待値が大きくなる。勝敗判定には表金額だけを使い、終了後の金額には裏硬貨の移動を反映する、という 2 段階で整理するのが安全である。A の表枚数でまとめると表が小さくなり、勝ち・負け・引き分けの各場合を同じ表で確認できる。期待値では単位が円であることも最後に明記したい。第 2 解法では、受取額と支払額を別々の確率変数として期待値を計算し、直接列挙の結果を検算した。

【第 5 問】

2 以上の自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する。 $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 $f_n(x)$ が区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

区間 $1/(k+1) < x < 1/k$ には $f_n(x)$ の零点がないので、 $f'_n(x) = 0$ は $f'_n(x)/f_n(x) = 0$ と同値に扱える。積の微分を用いて $f'_n(x)/f_n(x) = \sum_{j=1}^n 1/(x-1/j)$ と表し、この右辺を $g(x)$ とおく。 $g'(x) < 0$ なので単調減少し、区間の左端で $+\infty$ 、右端で $-\infty$ に発散することから、零点がただ 1 つある。最後に f_n の符号が区間内で一定であることを使い、その零点で極値をとることを示す。

【解答】

$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ である。 $f_n(x) = 0$ となるのは $x = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ のときである。したがって、区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ では $f_n(x) \neq 0$ である。

この区間で $f'_n(x)/f_n(x)$ を考える。積の微分を用いると、各因子を 1 つずつ微分した項の和になるので

$$\frac{f'_n(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x-1} + \cdots + \frac{n}{nx-1}$$

である。ここで $\frac{j}{jx-1} = \frac{1}{x-1/j}$ だから $\frac{f'_n(x)}{f_n(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x-1/j}$ である。

右辺を $g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x-1/j}$ とおく。すると $g'(x) = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{(x-1/j)^2} < 0$ であるから、 $g(x)$ はこの区間で単調に減少する。

また、 $x \rightarrow 1/(k+1) + 0$ のとき、項 $\frac{1}{x-1/(k+1)}$ が $+\infty$ に発散し、他の項は有限の値に近づく。したがって $\lim_{x \rightarrow 1/(k+1)+0} g(x) = +\infty$ である。一方、 $x \rightarrow 1/k - 0$ のとき、項 $\frac{1}{x-1/k}$ が $-\infty$ に発散し、他の項は有限の値に近づく。したがって $\lim_{x \rightarrow 1/k-0} g(x) = -\infty$ である。

よって単調減少性と連続性から、この区間に $g(x) = 0$ を満たす点がただ 1 つ存在する。区間内では $f_n(x) \neq 0$ なので、これは $f'_n(x) = 0$ を満たす点がただ 1 つ存在することと同値である。

さらに、 $g(x)$ はその点の左側で正、右側で負である。 $f_n(x)$ は区間内で 0 にならないので符号が一定であり、 $f'_n(x) = f_n(x)g(x)$ の符号はその 1 点を境に必ず変化する。したがって $f_n(x)$ は区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとる。

▶ 解法 2 (ロルの定理と次数)

【方針】

多項式 f_n は $1, 1/2, \dots, 1/n$ を相異なる零点にもつ。隣り合う零点の間ごとにロルの定理を使えば、導関数の零点が少なくとも 1 つずつ得られる。一方 f'_n は $n-1$ 次式なので、全体でそれ以上の零点をもてない。最後に区間内で f_n の符号が一定であることから、その 1 点が実際に極値を与えると確認する。

【解答】

$f_n(x)$ は n 次多項式であり、相異なる零点

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$$

をもつ。各 $k = 1, 2, \dots, n-1$ について、閉区間

$$\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$$

の両端で f_n の値は 0 である。したがってロルの定理により、开区間

$$\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$$

には $f'_n(x) = 0$ となる点が少なくとも 1 つ存在する。

このような区間は互いに交わらず、全部で $n-1$ 個ある。一方、 $f'_n(x)$ は $n-1$ 次多項式だから、相異なる実数解を $n-1$ 個より多くもつことはできない。よって各区間には $f'_n(x) = 0$ となる点がちょうど 1 つずつ存在する。

さらに、各区間の内部では $f_n(x) \neq 0$ であり、連続性から符号は一定である。両端では 0、内部では同符号の 0 でない値をとるので、区間内のただ 1 つの停留点で、符号が正なら極大値、負なら極小値をとる。したがって $f_n(x)$ は各区間でただ 1 つの極値をとる。

【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 20 分。積で定義された多項式の微分を、そのまま展開せず f'_n/f_n の形で扱うのが決め手である。区間内には根がないため割り算が正当化でき、 $g(x) = \sum 1/(x-1/j)$ の単調減少性に帰着する。左端で $+\infty$ 、右端で $-\infty$ になる項がそれぞれ $j = k+1$ 、 $j = k$ であることを明示すると、零点の存在と一意性がはっきりする。最後に、導関数の零点があるだけでなく符号が変わるので極値である、と書くのが重要である。第 2 解法は、隣接する零点間へロルの定理を適用し、導関数の次数で個数を確定する問題の意図に沿った方法である。