

入 学 試 験 問 題

数 学



九 州 大 学 2015 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

C_1 , C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leq x \leq 0$$

また, a を実数とし, 直線 $y = a(x + 4)$ を l とする。

(1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下, a が (1) の条件を満たすとする。このとき, l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 , x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とすると、不等式

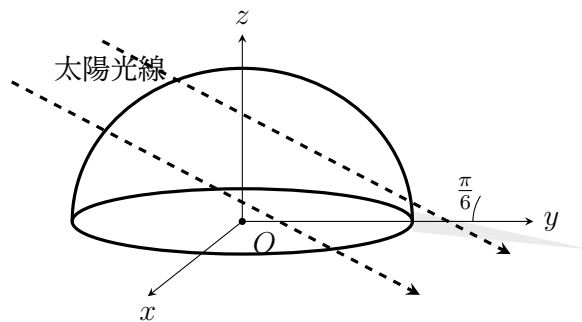
$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ。

第 3 問

座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき、 xy 平面上の直線 $x = k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。
- (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。



第 4 問

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
- (4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

第 5 問

以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。 $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。
- (3) p, q を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)