

九州大学 2015 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leq x \leq 0$$

また、 a を実数とし、直線 $y = a(x+4)$ を l とする。

(1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下、 a が (1) の条件を満たすとする。このとき、 l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 、 x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 l が点 $(-4, 0)$ を通ることに注目し、 C_1 上の点と $(-4, 0)$ を結ぶ傾き $g(x) = x(2-x)/(x+4)$ の最大値を調べる。 $a = 0$ では端点 $x = 0, 2$ の 2 点を必ず別扱いする。面積は共有点を与える 2 次方程式の根の間隔で表し、最後は $S_1 - S_2$ の連続性と $a = 0, 1/5$ での符号変化を用いる。

【解答】

(1)

直線 $l : y = a(x+4)$ は点 $(-4, 0)$ を通る。 C_1 上の点 $(x, -x^2 + 2x)$ と $(-4, 0)$ を結ぶ直線の傾きは $g(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x+4} = \frac{x(2-x)}{x+4}$ である。ここで $0 \leq x \leq 2$ である。

端点では $g(0) = g(2) = 0$ であり、内部では $g(x) > 0$ である。したがって $a = 0$ なら端点 $x = 0, 2$ の 2 点で交わる。また $a > 0$ では、水平線 $y = a$ が $g(x)$ のグラフと $0 < x < 2$ で異なる 2 点で交わる条件を調べればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2-2x)(x+4) - (2x-x^2)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 8x + 8}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

である。よって $g'(x) = 0$ は $x^2 + 8x - 8 = 0$ であり、 $0 < x < 2$ にある解は $x = -4 + 2\sqrt{6}$ である。この点で $g(x)$ は最大となる。最大値は $g(-4 + 2\sqrt{6}) = 10 - 4\sqrt{6}$ である。

したがって、異なる 2 つの共有点をもつ条件は $0 \leq a < 10 - 4\sqrt{6}$ である。

(2)

共有点の x 座標は $-x^2 + 2x = a(x+4)$ すなわち $x^2 + (a-2)x + 4a = 0$ の 2 解である。この 2 次方程式の判別式を $D = (a-2)^2 - 16a = a^2 - 20a + 4$ とおく。2 解を $\alpha < \beta$ とすると、 $\beta - \alpha = \sqrt{D}$ である。

2 交点の間では C_1 が直線 l より上にある。実際、差は $(-x^2 + 2x) - a(x+4) = -(x^2 + (a-2)x + 4a) = (x-\alpha)(\beta-x)$ である。したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x) dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{D^{3/2}}{6} \end{aligned}$$

である。よって $S_1 = \frac{(a^2 - 20a + 4)^{3/2}}{6}$ である。

(3) a を $0 \leq a \leq 1/5$ の範囲で考えると、 S_1 も S_2 も a に対して連続に変化する。したがって $S_1 - S_2$ の符号変化を調べればよい。

まず $a = 0$ のとき、直線 l は x 軸である。よって $S_2 = 0$ であり、(2) の式から $S_1 = \frac{4^{3/2}}{6} = \frac{4}{3}$ である。したがって $S_1 - S_2 > 0$ である。

次に $a = 1/5$ のときを調べる。(2) より $D = \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 20 \cdot \frac{1}{5} + 4 = \frac{1}{25}$ だから $S_1 = \frac{(1/25)^{3/2}}{6} = \frac{1}{750}$ である。

一方、 $C_2: y = -x^2 - 2x$ と直線 $y = (x+4)/5$ の交点は $-x^2 - 2x = \frac{x+4}{5}$ すなわち $5x^2 + 11x + 4 = 0$ の解であり、 $x = \frac{-11 \pm \sqrt{41}}{10}$ である。 x 軸と C_2 で囲まれる全体の面積は

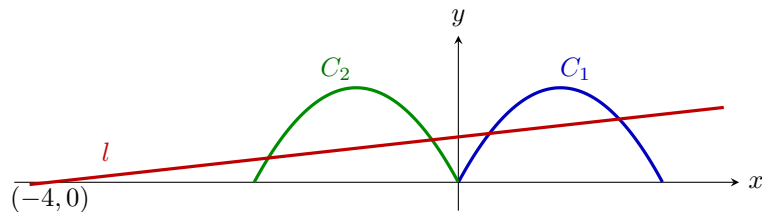
$$\int_{-2}^0 (-x^2 - 2x) dx = \frac{4}{3}$$

である。直線より上にある部分は、2 交点の間で C_2 と直線に囲まれる部分であり、その面積は根の間隔 $\frac{\sqrt{41}}{5}$ を用いて $\frac{(\sqrt{41}/5)^3}{6} = \frac{41\sqrt{41}}{750}$ である。したがって $S_2 = \frac{4}{3} - \frac{41\sqrt{41}}{750}$ である。

ここで $\frac{4}{3} - \frac{41\sqrt{41}}{750} > \frac{1}{750}$ である。実際、これは $999 > 41\sqrt{41}$ と同値であり、両辺は正で、2 乗すると $998001 > 68921$ であるから正しい。よって $a = 1/5$ では $S_1 - S_2 < 0$ である。

以上より、連続性と中間値の定理から、 $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が存在する。

たとえば $a = 0.12$ のときの位置関係は次のようになる。左側に C_2 、右側に C_1 があり、直線 l は両側を横切る。



▶ 解法 2 (2 根の位置と判別式)

【方針】

共有点の 2 次方程式について、判別式だけでなく根の和・積から 2 根が $[0, 2]$ に入る条件を直接示す。面積を根の間隔で表し、端点での面積差を使って存在証明まで完結させる。

【解答】

共有点を与える 2 次方程式の根を直接調べる。

(1)

C_1 と l の共有点の x 座標は

$$h(x) = x^2 + (a-2)x + 4a = 0$$

の解である。判別式は

$$D = a^2 - 20a + 4$$

である。

$a = 0$ のとき $h(x) = x(x-2)$ だから、 $x = 0, 2$ の 2 点で交わる。 $a > 0$ のとき、2 根の積は $4a > 0$ 、和は $2-a$ である。2 根が $0 < x < 2$ に入るためには、 $a < 2$ のもとで $D > 0$ であればよい。実際、2 根は正で、その和が 2 より小さいので各根は 2 より小さい。

$D > 0$ は

$$a < 10 - 4\sqrt{6} \quad \text{または} \quad a > 10 + 4\sqrt{6}$$

である。 $0 < a < 2$ と合わせ、 $a = 0$ も含めると

$$0 \leq a < 10 - 4\sqrt{6}$$

である。

(2)

2 根を $\alpha < \beta$ とすると

$$\beta - \alpha = \sqrt{D}$$

である。また C_1 と l の上下差は $(x - \alpha)(\beta - x)$ だから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \\ &= \frac{(a^2 - 20a + 4)^{3/2}}{6} \end{aligned}$$

である。

(3)

$F(a) = S_1(a) - S_2(a)$ とおく。領域の境界は $0 \leq a \leq 1/5$ で連続に動くので、 F はこの区間で連続である。

$a = 0$ では $S_1 = 4/3$, $S_2 = 0$ だから $F(0) > 0$ である。一方、 $a = 1/5$ では

$$S_1 = \frac{1}{750}, \quad S_2 = \frac{4}{3} - \frac{41\sqrt{41}}{750}$$

であり、 $S_2 > S_1$ だから $F(1/5) < 0$ である。したがって中間値の定理により

$$0 < a < \frac{1}{5}$$

に $F(a) = 0$ 、すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が存在する。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 25 分。(1) は判別式だけでなく、共有点が指定区間 $0 \leq x \leq 2$ に 2 つ入る条件まで見る必要がある。点 $(-4, 0)$ から C_1 上の点への傾き $g(x)$ を使うと、範囲条件が自然に処理できる。(2) は根の間隔から面積を出すと短い。(3) は具体的な解を求める問題ではなく、存在証明である。 $a = 0$ と $a = 1/5$ で $S_1 - S_2$ の符号を調べ、連続性で結ぶ構成が採点上の中心になる。既存答案で欠けていた端点 $a = 0$ を条件に含め、2 解法で再確認した。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とすると、不等式

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ。

【方針】

(1) は微分して分子の符号を見る。(2) は $u = \log x$ と置換すれば u^{-2} の積分になる。(3) は (1) の単調減少性から、各項を左隣の区間の積分で上から評価する。 $k \geq 3$ では $x \in [k-1, k]$ に対して $f(x) > f(k)$ なので、和が 2 から n までの積分で押さえられる。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$ とおく。 $x > 1$ では $\log x > 0$ である。積の形を使って $f(x) = x^{-1}(\log x)^{-2}$ と見ると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{-2}(\log x)^{-2} + x^{-1} \cdot (-2)(\log x)^{-3} \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2(\log x)^2} - \frac{2}{x^2(\log x)^3} \\ &= -\frac{\log x + 2}{x^2(\log x)^3} \end{aligned}$$

である。 $x > 1$ では分母は正で、 $\log x + 2 > 0$ であるから $f'(x) < 0$ である。したがって $f(x)$ は $x > 1$ において単調に減少する。

(2) $u = \log x$ とおくと $du = \frac{1}{x} dx$ である。したがって

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int u^{-2} du = -u^{-1} + C$$

である。よって

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log x} + C$$

である。

(3)

(1) より、関数 $f(x) = 1/\{x(\log x)^2\}$ は $x > 1$ で単調に減少する。したがって $k \geq 3$ に対して、 $k-1 \leq x \leq k$ なら $f(x) \geq f(k)$ である。しかも区間の内部では厳密に大きいので、

$$f(k) < \int_{k-1}^k f(x) dx$$

が成り立つ。すなわち

$$\frac{1}{k(\log k)^2} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\log x)^2}$$

である。

これを $k = 3, 4, \dots, n$ について足し合わせると

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \int_2^n \frac{dx}{x(\log x)^2}$$

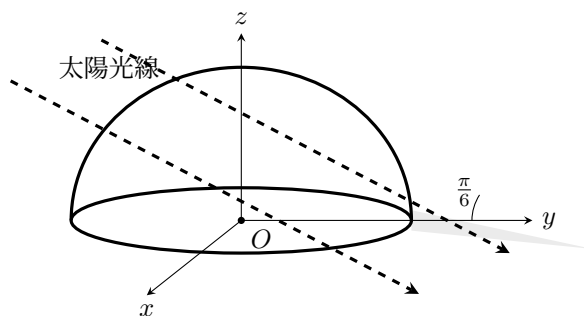
である。(2) より右辺は $\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log n}$ である。 $n \geq 3$ なので $\log n > 0$ であり、 $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log n} < \frac{1}{\log 2}$ である。したがって $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$ が示された。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 15 分。微分、置換積分、積分評価が一直線につながる問題である。(3) では単調減少関数に対して、項 $f(k)$ を区間 $[k-1, k]$ の積分で上から押さえる向きを間違えないことが重要である。積分区間が 2 から n になるため、最終的に $1/\log 2 - 1/\log n$ が出る。最後は $1/\log n > 0$ を使って、求める上界より真に小さいことを明示する。

【第 3 問】

座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とすると、 xy 平面上の直線 $x = k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。
- (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。



【方針】

光線方向を使って、固定した $x = k$ の断面で考える。半径 $R = \sqrt{1 - k^2}$ の上半円を、方向 $\sqrt{3}, -1$ に沿って xy 平面へ射影すると、影の y 範囲は $[-R, 2R]$ になる。球の外は $y > R$ なので (1) が出る。(2) はその長さを x で積分する。(3) は同じ断面で、影の外側境界が接線 $y + \sqrt{3}z = 2R$ 、球の外側境界が $y = \sqrt{R^2 - z^2}$ になることから、二重積分で体積を求める。

【解答】

(1) $x = k$ で切った断面を考える。球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ において $x = k$ とすると、 yz 平面内では $y^2 + z^2 \leq 1 - k^2$ である。ここで $R = \sqrt{1 - k^2}$ とおく。

光線はベクトル $0, \sqrt{3}, -1$ に平行なので、断面では方向 $\sqrt{3}, -1$ に平行である。球面上の点 k, y, z からこの方向に進んで xy 平面 $z = 0$ に到達すると、必要な移動量は z であり、到達点の y 座標は $y + \sqrt{3}z$ である。

上半球を考えているので、断面では $y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$ である。この範囲で $y + \sqrt{3}z$ の最小値は $(-R, 0)$ での $-R$ であり、最大値は方向 $1, \sqrt{3}$ に半径を取った点での $R\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2R$ である。したがって、 xy 平面上の直線 $x = k$ にできる影は $-R \leq y \leq 2R$ である。

一方、 xy 平面上で球の内部にあたる部分は $y^2 \leq R^2$ である。球の外で光が当たらない部分は、影のうち球の外側、すなわち正の y 側で $y > R$ となる部分である。よって求める範囲は $\sqrt{1 - k^2} < y \leq 2\sqrt{1 - k^2}$ である。

(2)

(1) より、固定した x における球の外の影の長さは $2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$ である。したがって面積 S は

$$S = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

である。これは半径 1 の半円の面積なので $S = \frac{\pi}{2}$ である。

(3)

再び x を固定し、 $R = \sqrt{1 - x^2}$ とおく。 yz 断面で考える。影の外側の境界は、半円 $y^2 + z^2 = R^2$ に方向 $\sqrt{3}, -1$ と平行に引いた接線である。この接線の法線方向は $1, \sqrt{3}$ なので、接線は $y + \sqrt{3}z = 2R$ である。

一方、高さ z における球の正の y 側の境界は $y = \sqrt{R^2 - z^2}$ である。したがって球の外で光が当たらない部分の断面の長さは $(2R - \sqrt{3}z) - \sqrt{R^2 - z^2}$ である。この長さが正である範囲は、2つの境界が交わるまでであり、 $2R - \sqrt{3}z = \sqrt{R^2 - z^2}$ を解くと $z = 0$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ である。よって必要な範囲は $0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}R$ である。

したがって体積 V は

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{3}R/2} (2R - \sqrt{3}z - \sqrt{R^2 - z^2}) dz dx$$

である。内側の積分を計算する。

$$\int_0^{\sqrt{3}R/2} (2R - \sqrt{3}z) dz = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}R}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3R^2}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{8} R^2$$

である。また、 $z = R \sin \theta$ とおくと

$$\int_0^{\sqrt{3}R/2} \sqrt{R^2 - z^2} dz = R^2 \int_0^{\pi/3} \cos^2 \theta d\theta = R^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right)_0^{\pi/3} = R^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

である。よって内側の積分は

$$R^2 \left(\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$$

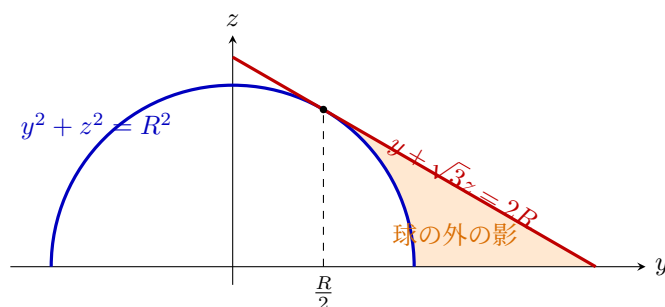
である。

ここで $R^2 = 1 - x^2$ なので

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

である。

固定した x における yz 断面では、球面と影の外側境界は次のように見える。



【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 32 分。空間図形だが、 $x = k$ で切った yz 断面に落とすと、半円と平行光線の問題になる。(1) では射影される y 座標が $y + \sqrt{3}z$ になること、最大値が $2R$ になることを説明する。体積では、影の外側境界が接線 $y + \sqrt{3}z = 2R$ であり、球の外側境界が $y = \sqrt{R^2 - z^2}$ であることを押さえる。積分範囲 $0 \leq z \leq \sqrt{3}R/2$ の出し方が最も誤りやすい。原典の半球・太陽光線図を復元し、解答には固定 x の断面図も追加した。

【第 4 問】

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
- (4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

【方針】

赤玉数は 1 回ごとに 1 だけ増減するため、偶奇でまず (2) が分かる。長い回数は 1 回ごとではなく 2 回を 1 組にすると、偶数回後の赤玉数は 0 または 2 だけになり、2 状態の遷移で処理できる。赤玉 2 個から 2 回で赤玉 0 個になる確率は $2/9$ 、赤玉 2 個に戻る確率は $7/9$ 。赤玉 0 個から 2 回で赤玉 0 個に戻る確率は $1/3$ 、赤玉 2 個になる確率は $2/3$ 。この 2 回遷移で、初到達と硬貨 1 枚の確率を数える。

【解答】

(1)

最初は赤玉 2 個、青玉 1 個である。2 回目の操作で硬貨をもらうには、1 回目と 2 回目に続けて赤玉を取り出し、操作後に赤玉が 0 個になればよい。

1 回目に赤玉を取り出す確率は $\frac{2}{3}$ である。この後、赤玉 1 個、青玉 2 個になるので、2 回目に赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{3}$ である。したがって求める確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。

(2)

赤玉の個数は、赤玉を取り出せば 1 減り、青玉を取り出せば 1 増える。したがって 1 回の操作ごとに赤玉の個数の偶奇は必ず変わる。

最初の赤玉の個数は 2 個で偶数である。よって奇数回目の操作の直後には、赤玉の個数は奇数である。硬貨をもらうのは赤玉の個数が 0 個、すなわち偶数になったときであるから、奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない。

(3)

2 回の操作を 1 組として見る。偶数回目の直後、赤玉数は 0 または 2 である。

赤玉 2 個の状態から 2 回操作すると、赤玉を 2 回続けて引いたときに赤玉 0 個となり、硬貨を 1 枚もらう。この確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。それ以外では赤玉 2 個に戻るなので、その確率は $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ である。

8 回目ではじめて硬貨をもらうには、最初の 3 組、すなわち 6 回目までは赤玉 2 個に戻り続け、最後の 4 組目で赤玉 0 個になればよい。したがって確率は $\left(\frac{7}{9}\right)^3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{686}{6561}$ である。

(4)

同じ 2 回遷移を用いる。赤玉 0 個の状態から 2 回操作すると、1 回目は必ず青玉を取り出して赤玉 1 個になる。2 回目に赤玉を取り出せば再び赤玉 0 個となり、硬貨を 1 枚もらう。この確率は $1/3$ である。2 回目に青玉を取り出せば赤玉 2 個となり、硬貨はもらわない。この確率は $2/3$ である。

4 組、すなわち 8 回の操作で硬貨がちょうど 1 枚になる場合を、どの組でただ 1 枚の硬貨をもらうかで分ける。

1 組目で硬貨をもらう場合は $2 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2$ となる必要があるので、確率は $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2$ である。

2 組目で硬貨をもらう場合は $2 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 2$ であり、確率は $\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9}$ である。

3 組目で硬貨をもらう場合は $2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 2$ であり、確率は $\left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$ である。

4 組目で硬貨をもらう場合は、それまで硬貨をもらわず赤玉 2 個に戻り続け、最後に赤玉 0 個になればよいので、確率は $\left(\frac{7}{9}\right)^3 \cdot \frac{2}{9}$ である。

したがって求める確率は

$$3 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{7}{9}\right)^3 \cdot \frac{2}{9}$$

である。計算すると

$$3 \cdot \frac{49}{81} \cdot \frac{4}{27} + \frac{343}{729} \cdot \frac{2}{9} = \frac{588}{2187} + \frac{686}{6561} = \frac{1764 + 686}{6561} = \frac{2450}{6561}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 24 分。1 回ごとの状態表でも解けるが、2 回を 1 組にすると偶数回後の赤玉数が 0 または 2 に限られ、計算が大幅に整理される。(2) の偶奇性は短いが重要で、奇数回目を最初から除外できる。(3) は「初めて」なので、最初の 3 組で赤玉 2 個に戻り続ける必要がある。(4) は硬貨をもらった後、次の 2 回組で赤玉 0 個に留まるともう 1 枚増えるため、必ず $0 \rightarrow 2$ を選ぶ条件を入れる。場合分けの各確率を積で書くと、分母 6561 への整理も追いやすい。

【第 5 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。 $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。
- (3) p, q を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

【方針】

(1) は文系第 4 問と同じく $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ を使う。(2) は 2 数の差が 2 であり、どちらも奇数であることから共通因数が 1 しかないと示す。(3) はまず $p = 2$ を除き、奇素数では (1) から左辺が 3 の倍数になるので $p = 3$ または $q = 3$ に絞る。 $p = 3$ を排除した後、 $q = 3$ として $2^{p-1} - 1 = 9p$ を平方差に分解し、互いに素な 2 因子が差 2 であることから候補を決める。

【解答】

(1) n は正の偶数なので、 $n = 2m$ と書ける。 $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから $2^n = 2^{2m} = (2^2)^m \equiv 1^m \equiv 1 \pmod{3}$ である。よって $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ となり、 $2^n - 1$ は 3 の倍数である。

(2) $2^n + 1$ と $2^n - 1$ の正の公約数を d とする。このとき d は差 $(2^n + 1) - (2^n - 1) = 2$ を割り切る。したがって d は 1 または 2 である。

一方、 $2^n + 1$ も $2^n - 1$ も奇数であるから、2 を公約数にもつことはない。したがって $d = 1$ であり、 $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である。

(3)

まず $p = 2$ とすると、左辺は $2^{p-1} - 1 = 1$ であるが、右辺 pq^2 は 2 以上なので不可能である。

以下、 p は奇素数とする。このとき $p - 1$ は正の偶数であるから、(1) より $2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である。したがって右辺 pq^2 も 3 の倍数であり、 $p = 3$ または $q = 3$ である。

もし $p = 3$ なら $2^{p-1} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ であり、方程式は $3 = 3q^2$ となる。これは $q^2 = 1$ を意味し、 q が素数であることに反する。よって $p \neq 3$ であり、したがって $q = 3$ である。

このとき方程式は $2^{p-1} - 1 = 9p$ である。 p は 3 でない奇素数なので、 $m = \frac{p-1}{2}$ とおくと m は正の整数で、 $2^{p-1} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$ である。よって $(2^m - 1)(2^m + 1) = 9p$ である。

もし $m = 1$ なら左辺は 3 で $9p$ に等しくないから、 $m \geq 2$ である。よって 2 因子はともに 1 より大きい。(2) より $2^m - 1$ と $2^m + 1$ は互いに素で、積は $3^2 p$ である。しかも $p \neq 3$ なので、互いに素な 2 因子への素因数の分配は 9 と p に限られる。したがって一方が 9、他方が p である。

もし $2^m - 1 = 9$ なら $2^m = 10$ となり不可能である。したがって $2^m + 1 = 9$ でなければならない。このとき $2^m = 8$ より $m = 3$ である。よって $p = 2m + 1 = 7$ である。実際、 $2^{7-1} - 1 = 64 - 1 = 63 = 7 \cdot 3^2$ であるから条件を満たす。

したがって求める組は $(p, q) = (7, 3)$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 22 分。(3) は、左辺が 3 の倍数であることから $p = 3$ または $q = 3$ に絞るのが第一段階である。 $p = 3$ はすぐ矛盾するので $q = 3$ となる。その後、 $2^{p-1} - 1$ を平方差で分解し、2 つの因子が互いに素で差 2 であることを使う。積が $9p$ なので 3 の因子 2 つは片方にまとまる、という点を明記すると候補漏れを防げる。最後に $p = 7, q = 3$ を代入確認して完答となる。