

九州大学 2016 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

等式 $(i - \sqrt{3})^m = (1 + i)^n$ を満たす自然数 m, n のうち、 m が最小となるときの m, n の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

▶ 解法 1

【方針】

両辺を極形式に直し、まず絶対値から m, n の関係を決める。その後、偏角は 2π の整数倍だけずれてよいことを使い、 m の最小条件を合同式として調べる。最後に得た組が実際に等式を満たすことも確認する。

【解答】

$$i - \sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right), \quad 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

である。両辺の絶対値を比較すると $2^m = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}$ であるから $n = 2m$ である。

次に偏角を比較する。複素数の等式では偏角は 2π の整数倍だけ違ってよいので $\frac{5m\pi}{6} \equiv \frac{n\pi}{4} \pmod{2\pi}$ である。 $n = 2m$ を代入すると $\frac{5m\pi}{6} \equiv \frac{m\pi}{2} \pmod{2\pi}$ すなわち $\frac{m\pi}{3} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ である。したがって m は 6 の倍数でなければならない。 m が最小となるのは $m = 6$ のときで、このとき $n = 2m = 12$ である。実際、絶対値はともに 64、偏角は左辺が 5π 、右辺が 3π で、差は 2π であるから等しい。

よって $m = 6, n = 12$ である。

▶ 解法 2

【方針】

絶対値から $n = 2m$ を得た後、両辺を $(1 + i)^{2m}$ で割る。残る複素数を具体的に計算すると 6 乗して初めて 1 になる原始 6 乗根になるため、偏角の合同式を立てずに最小の m を決められる。

【解答】

両辺の絶対値を比較すると

$$|i - \sqrt{3}|^m = |1 + i|^n$$

より

$$2^m = (\sqrt{2})^n.$$

したがって

$$n = 2m. \tag{1}$$

(1) をもとの等式に代入し、 $(1 + i)^{2m}$ で割ると

$$\left(\frac{i - \sqrt{3}}{(1 + i)^2} \right)^m = 1.$$

ここで

$$(1 + i)^2 = 2i$$

だから

$$\frac{i - \sqrt{3}}{2i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} =: \omega.$$

直接計算すると

$$\omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^3 = -1, \quad \omega^6 = 1.$$

したがって $\omega^m = 1$ となる最小の自然数は $m = 6$ である。(1) より $n = 12$ となる。

ゆえに

$$m = 6, \quad n = 12$$

である。

【総評】 難度 4、計算量 3。極形式と偏角の合同を使う基本問題で、目安時間は 8 分程度。先に絶対値を比較して $n = 2m$ を出すと、偏角の条件が $m\pi/3$ だけになり見通しがよい。誤りやすいのは、偏角を単純な等式として扱ってしまい、 2π の整数倍のずれを忘れることである。最後に最小の m が 6 であること、対応する n が 12 であることを両方書けば答案として十分である。

【第 2 問】

箱の中に、白色の球が n 個、青色の球が n 個、赤色の球が n 個入っている。それぞれの色の球には 1 から n までの番号が重複なく書かれている。ただし $n = 1$ のときは、それぞれ番号 1 が書かれた白球、青球、赤球が 1 個ずつ入っているとする。箱から球を 1 個取り出して箱に戻すことを 3 回行う。以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 3$ とする。取り出された球のうち少なくとも 1 個の番号が 3 であるとき、取り出された 3 個の球の番号の合計値が 9 である条件つき確率を求めよ。
- (2) $n \geq 1$ とする。取り出された球のうち少なくとも 1 個は 1 が書かれた赤玉であるとき、取り出された 3 個の球がすべて赤玉である条件つき確率 $p(n)$ を n の式で表せ。
- (3) $n \geq 1$ とする。(2) で求めた $p(n)$ の最小値を求めよ。
- (4) $n \geq 1$ とする。(2) で求めた $p(n)$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

条件付き確率は、同じ大きさの順序つき試行結果を数えて求める。(1) では色は分子・分母で同じだけ掛かるので番号だけを数え、和が 9 で少なくとも 1 つが 3 となる順序つき三つ組を $n = 3, 4, n \geq 5$ に分ける。(2) では「赤の 1 番」という特定の球を少なくとも 1 回含む事象を補集合で数え、(3)(4) は得られた有理式の差と最高次の係数を見る。

【解答】

(1)

番号だけに注目する。3 回の取り出しで得られる番号の順序つき三つ組のうち、少なくとも 1 つが 3 であるものは $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ 通りである。色の選び方は各回 3 通りずつあるが、分子にも分母にも同じく 3^3 倍がかかるため、条件付き確率では打ち消し合う。

次に、番号の和が 9 で少なくとも 1 つが 3 である三つ組を数える。ある 1 つの位置を 3 に固定すると、残り 2 つの番号の和は 6 である。

$n = 3$ のとき、残り 2 つは (3, 3) しかないので、三つ組は (3, 3, 3) の 1 通りである。

$n = 4$ のとき、和が 6 となる残り 2 つは (2, 4), (3, 3), (4, 2) である。3 の位置の選び方を考えると一度は 9 通りと数えられるが、(3, 3, 3) が重複して数えられる。包除原理により $9 - 3 + 1 = 7$ 通りである。

$n \geq 5$ のとき、和が 6 となる残り 2 つは (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) である。3 の位置を指定した数え上げと、(3, 3, 3) の重複補正により $15 - 3 + 1 = 13$ 通りである。

したがって求める条件付き確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{19} & (n = 3), \\ \frac{7}{37} & (n = 4), \\ \frac{13}{3n^2 - 3n + 1} & (n \geq 5) \end{cases}$$

である。

(2)

3 回の取り出しを順序つきで数える。全体では各回 $3n$ 通りである。赤の 1 番の球を少なくとも 1 回含む取り出し方は、補集合を使って $(3n)^3 - (3n-1)^3 = 27n^2 - 9n + 1$ 通りである。

そのうち 3 個とも赤玉で、かつ赤の 1 番を少なくとも 1 回含むものは、赤玉だけに限って番号を数えればよい。したがって $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ 通りである。よって $p(n) = \frac{3n^2 - 3n + 1}{27n^2 - 9n + 1}$ である。

(3)

(2) の式について差を調べる。 $p(n+1) - p(n) = \frac{6(9n^2 + n - 3)}{(27n^2 - 9n + 1)(27n^2 + 45n + 19)}$ である。 $n \geq 1$ では分母は正であり、分子も $9n^2 + n - 3 \geq 9 + 1 - 3 = 7 > 0$ だから、 $p(n+1) > p(n)$ である。よって $p(n)$ は $n \geq 1$ で単調に増加し、最小値は $n = 1$ のときである。 $p(1) = \frac{1}{19}$ したがって $\frac{1}{19}$ が最小値である。

(4)

最高次の係数を比較すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3n + 1}{27n^2 - 9n + 1} = \frac{1}{9}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は和が 9 となる番号の多重集合を先に分類し、順列数を数える。(2) は事象の個数ではなく、「すべて赤」と「赤 1 番を少なくとも 1 回含む」の確率を補集合で直接計算する。(3) は $p(n) - p(1)$ を因数分解して最小値を示す。

【解答】

(1) 番号の和が 9 で、少なくとも 1 つが 3 である三つ組を、順序を無視して分類する。3 を 1 つ除くと残り 2 数の和は 6 だから、可能性は

$$\{3, 3, 3\}, \quad \{2, 3, 4\}, \quad \{1, 3, 5\}$$

だけである。

$\{3, 3, 3\}$ の並べ方は 1 通り、残り 2 つは各 6 通りである。したがって、条件を満たす順序つき三つ組の数は

$$\begin{cases} 1 & (n=3), \\ 1+6=7 & (n=4), \\ 1+6+6=13 & (n \geq 5). \end{cases}$$

一方、少なくとも 1 回番号 3 が出る順序つき三つ組は

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

通りである。色の選択は条件付き確率の分子・分母で打ち消し合うので、求める確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{19} & (n=3), \\ \frac{7}{37} & (n=4), \\ \frac{13}{3n^2 - 3n + 1} & (n \geq 5) \end{cases}$$

である。

(2) 「3 回とも赤」を A , 「赤の 1 番を少なくとも 1 回含む」を B とする。各回で赤の 1 番を引く確率は $1/(3n)$ だから

$$P(B) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3.$$

また A の確率は $1/27$ であり、すべて赤であるという条件のもとでは番号は $1, \dots, n$ から一様に選ばれる。よって

$$P(A \cap B) = \frac{1}{27} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 \right\}.$$

したがって

$$\begin{aligned} p(n) &= P(A | B) \\ &= \frac{\frac{1}{27} \{1 - (1 - 1/n)^3\}}{1 - (1 - 1/(3n))^3} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 1}{27n^2 - 9n + 1}. \end{aligned}$$

(3)

$$p(n) - \frac{1}{19} = \frac{6(n-1)(5n-3)}{19(27n^2-9n+1)}.$$

$n \geq 1$ では右辺は 0 以上で、等号は $n = 1$ のときに限る。したがって最小値は

$$\frac{1}{19}$$

である。

(4) 分子・分母を n^2 で割ると

$$p(n) = \frac{3 - 3/n + 1/n^2}{27 - 9/n + 1/n^2} \rightarrow \frac{1}{9}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。条件付き確率そのものは標準的だが、(1) は番号と色を分けて考える判断、(2) は特定の 1 個の球を含む列を補集合で数える判断が必要である。目安時間は 20 分程度。特に (1) では $n = 3, 4, n \geq 5$ で和が 6 となる 2 数の候補数が変わるため、場合分けを省くと誤答になりやすい。(3) は有理式の差を正確に整理して単調性を示すのが採点点で、最小値を極限と混同しないよう注意したい。

【第 3 問】

座標空間内に点 $A(-2, 3, 0)$ 、点 $B(2, -1, 0)$ 、点 $C(2, 3, 4)$ がある。また、ベクトル $\vec{m} = (-1, 1, 3)$ に平行で点 $D(1, 2, 0)$ を通る直線 l 、ベクトル $\vec{n} = (b, 1, c)$ に垂直で点 $E(0, a, 0)$ を通る平面 π がある。平面 π は直線 l を含んでいる。以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) a と b をそれぞれ c の式で表せ。
- (3) 平面 π が線分 AC と線分 BC の両方と共有点を持ち、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するときの c の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

平面が直線を含む条件は、法線ベクトルが直線方向ベクトルと垂直であること、さらに直線上の点 D が平面上にあることの 2 つで表す。(3) では平面と AC, BC の交点をそれぞれパラメータ u, v で表し、 $0 \leq u, v \leq 1$ の線分条件を必ず確認する。面積二等分条件から候補の c を出したあと、その候補が線分条件を満たすかまで照合する。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (4, -4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 0, 4)$$

である。したがって

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 32, \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = 32, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16.$$

$\angle BAC = \theta$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{32}\sqrt{32}} = \frac{1}{2},$$

よって $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ である。したがって

$$[ABC] = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = 8\sqrt{3}$$

である。

(2)

平面 π の法線ベクトルは $(b, 1, c)$ であり、直線 l の方向ベクトルは $\vec{m} = (-1, 1, 3)$ である。平面 π が直線 l を含むので、まず $(b, 1, c) \cdot (-1, 1, 3) = 0$ である。よって $-b + 1 + 3c = 0$ 、 $b = 1 + 3c$ である。

また、直線 l 上の点 $D(1, 2, 0)$ は平面 π 上にある。平面は点 $E(0, a, 0)$ を通り、法線ベクトルが $(b, 1, c)$ であるから $(b, 1, c) \cdot (D - E) = 0$ である。すなわち $b + (2 - a) = 0$ なので $a = b + 2 = 3 + 3c$ である。したがって $a = 3 + 3c$ 、 $b = 1 + 3c$ である。

(3)

線分 AC 上の点を $X = A + u(C - A) = (-2 + 4u, 3, 4u)$ ($0 \leq u \leq 1$) とおく。 X が平面 π 上にある条件に、(2) の a, b を代入すると $(-2 + 4u)(1 + 3c) + 3 - (3 + 3c) + 4cu = 0$ である。これを解くと $u = \frac{9c + 2}{4(4c + 1)}$ である。ただし $4c + 1 = 0$ のときはこの式の分母が 0 になり、実際に上の方程式は成り立たないので、線分 AC との共有点をもたない。

次に、線分 BC 上の点を $Y = B + v(C - B) = (2, -1 + 4v, 4v)$ ($0 \leq v \leq 1$) とおくと、 Y が平面 π 上にある条件は $2(1 + 3c) + (-1 + 4v) - (3 + 3c) + 4cv = 0$ である。よって $v = \frac{2 - 3c}{4(c + 1)}$ である。ただし $c + 1 = 0$ のときも線分 BC との共有点をもたない。

平面が線分 AC と線分 BC の両方と共有点を持ち、交点を X, Y とすると、切り取られる三角形 CXY は三角形 CAB と相似で、面積比は $\frac{[CXY]}{[CAB]} = (1 - u)(1 - v)$ である。面積を 2 等分するには $(1 - u)(1 - v) = \frac{1}{2}$ が必要である。ここで

$$1 - u = \frac{7c + 2}{4(4c + 1)}, \quad 1 - v = \frac{7c + 2}{4(c + 1)} \quad \text{だから、} \quad \frac{(7c + 2)^2}{16(4c + 1)(c + 1)} = \frac{1}{2} \quad \text{となる。整理すると } (7c + 2)^2 = 8(4c + 1)(c + 1)$$

すなわち $17c^2 - 12c - 4 = 0$ である。したがって候補は $c = \frac{6 \pm 2\sqrt{26}}{17}$ である。

しかし、これらは線分条件を満たさない。まず $c_1 = \frac{6 + 2\sqrt{26}}{17}$ のとき、 $c_1 > -1$ で分母 $4(c_1 + 1)$ は正であるが、 $2 - 3c_1 = \frac{16 - 6\sqrt{26}}{17} < 0$ なので $v < 0$ である。したがって交点は線分 BC 上にない。

次に $c_2 = \frac{6 - 2\sqrt{26}}{17}$ のとき、 $4c_2 + 1 > 0$ である一方、 $9c_2 + 2 = \frac{88 - 18\sqrt{26}}{17} < 0$ なので $u < 0$ である。したがって交点は線分 AC 上にない。

よって、問題文の条件をすべて同時に満たす c は **存在しない**。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は 3 辺の長さから正三角形と判定する。(2) は平面の方程式へ直線のパラメータ表示を代入し、恒等式の係数を比較する。(3) は平面の左辺を頂点で評価し、線分と交わるための符号条件を先に求めてから、面積二等分で得た候補を範囲から除外する。

【解答】

(1) 3 辺の長さを調べると

$$AB^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32,$$

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32,$$

$$BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

したがって $\triangle ABC$ は一辺 $4\sqrt{2}$ の正三角形である。よって

$$[ABC] = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}.$$

(2) 平面 π の方程式は

$$bx + y + cz - a = 0 \tag{1}$$

と書ける。直線 l 上の点は

$$D + s\vec{m} = (1 - s, 2 + s, 3s)$$

である。これを (1) へ代入すると

$$(b + 2 - a) + s(-b + 1 + 3c) = 0.$$

直線全体が平面上にあるため、これはすべての実数 s で成り立つ。したがって

$$b + 2 - a = 0, \quad -b + 1 + 3c = 0.$$

ゆえに

$$a = 3 + 3c, \quad b = 1 + 3c.$$

(3) (2) を (1) へ代入し、左辺を

$$F_c(x, y, z) = (1 + 3c)x + y + cz - (3 + 3c)$$

とおく。頂点での値は

$$F_c(A) = -9c - 2, \quad F_c(B) = 3c - 2, \quad F_c(C) = 7c + 2. \quad (2)$$

平面が線分 AC と交わるには $F_c(A)F_c(C) \leq 0$, 線分 BC と交わるには $F_c(B)F_c(C) \leq 0$ が必要十分である。(2) から

$$c \leq -\frac{2}{7} \text{ または } c \geq -\frac{2}{9},$$

かつ

$$-\frac{2}{7} \leq c \leq \frac{2}{3}.$$

よって両線分と交わり得る範囲は

$$c = -\frac{2}{7} \text{ または } -\frac{2}{9} \leq c \leq \frac{2}{3}. \quad (3)$$

$c = -2/7$ では平面は頂点 C だけで両線分と交わり、切り取る三角形の面積は 0 なので除く。

交点を $X \in AC$, $Y \in BC$ とし

$$p = \frac{CX}{CA}, \quad q = \frac{CY}{CB}$$

とおく。 F_c は線分上で一次的に変化するから

$$p = \frac{F_c(C)}{F_c(C) - F_c(A)} = \frac{7c + 2}{4(4c + 1)},$$

$$q = \frac{F_c(C)}{F_c(C) - F_c(B)} = \frac{7c + 2}{4(c + 1)}.$$

したがって

$$\frac{[CXY]}{[CAB]} = pq.$$

面積を二等分する条件は $pq = 1/2$ であり,

$$(7c + 2)^2 = 8(4c + 1)(c + 1).$$

整理すると

$$17c^2 - 12c - 4 = 0,$$

したがって

$$c = \frac{6 \pm 2\sqrt{26}}{17}. \quad (4)$$

正符号の値は $2/3$ より大きい。また負符号の値は

$$-\frac{2}{7} < \frac{6 - 2\sqrt{26}}{17} < -\frac{2}{9}$$

であり, (3) の空白区間に入る。よって (4) のどちらも両線分と交わる条件を満たさない。したがって, **条件を満たす c は存在しない。**

【総評】 難度 7、計算量 7。直線を含む平面の条件までは標準的だが、(3) は面積二等分条件で得た候補をそのまま答えにしているといけない。目安時間は 25 分程度。採点上の山は、 AC, BC 上のパラメータ u, v を置き、面積比 $(1-u)(1-v)$ を作ったあと、 $0 \leq u, v \leq 1$ を検査する部分である。問題文通りに読むと、二等分条件から出る 2 つの候補はいずれも線分条件を破るため、該当する c は存在しない。ここを曖昧にせず、候補の不適合まで書く必要がある。

【第 4 問】

正の実数 a, b に対して $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, $G(a, b) = \sqrt{ab}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\min(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq \max(a, b)$ が成り立つことを示せ。

ただし, $\min(a, b)$ は a, b のうちの最小の数を表し, $\max(a, b)$ は a, b のうち最大の数を表す ($a = b$ の場合は a, b のうちのどちらかの数を表すとする)。

- (2) $a > b$, $a_0 = a$, $b_0 = b$ として, 以下の数列を定義する。

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じ極限值 (α とする) に収束することを示せ。

- (3) a_{n+2} を a_n と b_n を用いて表せ。ただし $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は (2) で定義した数列とする。

- (4) c_{n+2} と c_{n+1} の間に以下の関係が成り立つことを示せ。ただし, $\{c_n\}$ と α はそれぞれ (2) で定義した数列と極限值とする。

$$c_{n+2} < \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} c_{n+1} \right)^2$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は相加平均・相乗平均の基本不等式を、最大値・最小値との大小まで含めて示す。(2) では (1) を各段に適用し、 a_n が単調減少、 b_n が単調増加で、互いに挟み合うことから同じ極限へ向かうことを示す。(3)(4) は平方根を使って差を平方の形に直し、 c_{n+2} を c_{n+1} と a_{n+2} の式に変形する。

【解答】

(1)

$a \geq b$ として示せば十分である。このとき $\min(a, b) = b$, $\max(a, b) = a$ である。まず $a \geq b > 0$ より $b^2 \leq ab$ なので $b \leq \sqrt{ab} = G(a, b)$ である。また $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$ より $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = A(a, b)$ である。さらに $\frac{a+b}{2} \leq a$ も明らかである。よって $\min(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq \max(a, b)$ が成り立つ。 $b \geq a$ の場合も同様である。

(2)

$a_0 > b_0 > 0$ である。(1) を a_n, b_n に適用すると $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ である。したがって $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列、 $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加列である。よってそれぞれ極限をもつ。これらを $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ とおくと、上の不等式から $A \geq B$ である。

漸化式 $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ の両辺で極限をとると $A = \frac{A+B}{2}$ である。したがって $A = B$ である。よって 2 つの数列は同じ極限值に収束する。この共通の極限値を α と書く。

(3)

定義より

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n} \right)$$

である。したがって $a_{n+2} = \frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}{4}$ である。

(4)

まず

$$c_{n+2} = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \right)$$

であるから $c_{n+2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{4}$ である。一方、

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2}$$

である。よって $c_{n+2} = \frac{c_{n+1}^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}$ となる。

(3) より $(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2 = 4a_{n+2}$ である。初期値で $a_0 > b_0$ であり、相加平均と相乗平均の等号条件から各段階でも $a_n > b_n$ が続く。したがって $\{a_n\}$ は極限 α へ厳密に単調減少するので、各 n について $a_{n+2} > \alpha$ である。したがって $(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2 = 4a_{n+2} > 4\alpha$ である。以上より

$$c_{n+2} = \frac{c_{n+1}^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} < \frac{c_{n+1}^2}{4\alpha} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} c_{n+1} \right)^2$$

が成り立つ。

▶ 解法 2

【方針】

平均の差を平方根の差で表す。(2) では区間 $[b_n, a_n]$ が入れ子になり、その長さが毎回半分未満になることを示して、共通極限を定量的に得る。(4) では $c_{n+2} = c_{n+1}^2 / (4a_{n+2})$ という正確な式から評価する。

【解答】

(1) $a \geq b$ としてよい。このとき

$$\sqrt{ab} - b = \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0,$$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0,$$

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \geq 0.$$

したがって

$$b \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq a.$$

$b \geq a$ の場合は文字を入れ替えればよいので、題意の不等式が成り立つ。

(2) $a_n > b_n > 0$ なら (1) の等号条件から

$$b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \quad (1)$$

である。したがって $[b_{n+1}, a_{n+1}]$ は $[b_n, a_n]$ の内部にある。

さらに

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \\ &< \frac{a_n - b_n}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$0 < a_n - b_n < \frac{a - b}{2^n} \rightarrow 0. \quad (2)$$

(1) より $\{a_n\}$ は単調減少で下に有界、 $\{b_n\}$ は単調増加で上に有界だから、それぞれ極限をもつ。(2) より 2 つの極限の差は 0 である。したがって両数列は同じ極限

$$\alpha$$

に収束する。

(3)

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}{4}. \end{aligned}$$

(4)

$$c_{n+2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{4}$$

であり、

$$c_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2}.$$

したがって

$$c_{n+2} = \frac{c_{n+1}^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{c_{n+1}^2}{4a_{n+2}}. \quad (3)$$

(1) より $\{a_n\}$ は極限 α へ厳密に単調減少するので

$$a_{n+2} > \alpha.$$

これを (3) へ用いると

$$c_{n+2} < \frac{c_{n+1}^2}{4\alpha} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} c_{n+1} \right)^2.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。相加平均と相乗平均を反復する問題で、単調性と差の評価を丁寧につなぐ必要がある。目安時間は 20 分程度。(2) では $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ の鎖を作ること、(4) では c_{n+2} を c_{n+1}^2 で表したうえで分母を $4a_{n+2}$ と見ることが核心である。 a_n と b_n が同じ極限に収束する理由を、単に「近づく」と書かず、極限を漸化式に代入して示すと答案が締まる。

【第 5 問】

媒介変数 $x = \sin t$, $y = t^2$ (ただし $-2\pi \leq t \leq 2\pi$) で表された曲線で囲まれた領域の面積を求めよ。なお領域が複数ある場合は、その総和を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$y = t^2$ なので、同じ高さ y に対応する媒介変数は t と $-t$ の 2 つだけである。そのとき x 座標は符号が反対になり、水平断面の幅は $2|\sin t|$ になる。複数の領域があっても、高さごとの横幅を積分すれば総面積を一度に求められる。最後は $0, \pi, 2\pi$ で絶対値を外して計算する。

【解答】

$y = t^2$ であるから、同じ高さにある点は $t = s$ と $t = -s$ に対応する。ただし $0 \leq s \leq 2\pi$ である。この 2 点の x 座標は $x = \sin s$, $x = \sin(-s) = -\sin s$ である。したがって高さ $y = s^2$ における横幅は $|\sin s - (-\sin s)| = 2|\sin s|$ である。

また $y = s^2$, $dy = 2s ds$ である。領域が複数に分かれていても、各高さで曲線に挟まれる横幅を足し合わせれば総面積になるので、求める面積 S は

$$S = \int_0^{(2\pi)^2} 2|\sin \sqrt{y}| dy = \int_0^{2\pi} 2|\sin s| \cdot 2s ds = 4 \int_0^{2\pi} s|\sin s| ds$$

である。

$0 \leq s \leq \pi$ では $\sin s \geq 0$ 、 $\pi \leq s \leq 2\pi$ では $\sin s \leq 0$ だから

$$S = 4 \left(\int_0^\pi s \sin s ds - \int_\pi^{2\pi} s \sin s ds \right)$$

である。部分積分により

$$\int s \sin s ds = -s \cos s + \sin s$$

だから

$$\int_0^\pi s \sin s ds = \pi$$

である。また

$$-\int_\pi^{2\pi} s \sin s ds = [s \cos s - \sin s]_\pi^{2\pi} = 2\pi - (-\pi) = 3\pi$$

である。よって $S = 4(\pi + 3\pi) = 16\pi$ である。

▶ 解法 2

【方針】

曲線の自己交点で内側と外側の 2 領域に分け、通常の面積公式

$$\int (\text{上側} - \text{下側}) dx$$

を各境界上で媒介変数積分へ直す。横幅を積分する解法とは異なり、 $dx = \cos t dt$ を使って各閉曲線の面積を求める。

【解答】

同じ点を与える t と $-t$ を比べると、 $y = t^2$ は等しく、 x が等しくなるのは

$$\sin t = -\sin t,$$

すなわち $\sin t = 0$ のときである。したがって曲線は

$$t = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$$

で y 軸上に戻り、内側と外側の 2 つの閉領域を作る。

閉曲線について、通常的面積

$$\int (\text{上側の } y - \text{下側の } y) dx$$

を境界の向きに沿ってまとめると、面積は

$$\left| - \int y dx \right|$$

と書ける。ここでは

$$y = t^2, \quad dx = \cos t dt.$$

内側の領域の境界は $-\pi \leq t \leq \pi$ で 1 周される。よってその面積 S_1 は

$$S_1 = \left| - \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt \right|.$$

被積分関数は偶関数であり、

$$\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t$$

だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos t dt = -4\pi.$$

したがって

$$S_1 = 4\pi.$$

外側の領域の境界は

$$-2\pi \leq t \leq -\pi, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

の 2 区間を合わせたものである。偶関数性より面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \left| -2 \int_{\pi}^{2\pi} t^2 \cos t dt \right| \\ &= |-2\{4\pi - (-2\pi)\}| = 12\pi. \end{aligned}$$

したがって総面積は

$$S_1 + S_2 = 4\pi + 12\pi = 16\pi$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 5。媒介変数曲線的面積問題だが、 $y = t^2$ のため水平切断で考えると整理しやすい。目安時間は 15 分程度。曲線は t と $-t$ で左右対称になり、各高さでの幅が $2|\sin t|$ になることが核心である。複数領域の総和を求める問題なので、絶対値を外さずに積分すると符号で面積が相殺される。 $dy = 2t dt$ の重みがあるため、単に

$$\int |\sin t| dt$$

としない点にも注意する。