

九州大学 2016 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上の曲線 C_1 , C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$

$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし、 a は実数である。 n を自然数とすると、曲線 C_1 , C_2 が 2 点 P , Q で交わり、 P , Q の x 座標はそれぞれ 1 , $n+1$ となっている。また、曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n 、曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を n の式で表し、 $a > 1$ を示せ。
- (2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

交点 $x = n+1$ を C_2 に代入して a を決める。面積 S_n は対数曲線と弦 PQ の差、 T_n は放物線と同じ弦の差として積分する。 a の式を使うと、 T_n の被積分関数は $(x-1)(n+1-x)$ に簡単化する。極限は S_n の主要項が $(n/2) \log n$ 、 $\log T_n$ の主要項が $3 \log n$ であることを確認する。

【解答】

(1)

$x = 1$ では C_1, C_2 ともに $y = 0$ である。もう一方の交点の x 座標が $n+1$ なので、 $\log(n+1) = ((n+1)-1)((n+1)-a) = n(n+1-a)$ である。したがって $a = n+1 - \frac{\log(n+1)}{n}$ である。また

$$\log(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < \int_1^{n+1} 1 dx = n$$

だから $\frac{\log(n+1)}{n} < 1$ であり、 $a = n+1 - \frac{\log(n+1)}{n} > n \geq 1$ である。よって $a > 1$ である。

(2)

点 P, Q を結ぶ直線の傾きは $\frac{\log(n+1)}{n}$ であるから、直線 PQ は $y = \frac{\log(n+1)}{n}(x-1)$ である。

まず $C_1 : y = \log x$ は上に凸であり、弦より上にあるので

$$S_n = \int_1^{n+1} \left(\log x - \frac{\log(n+1)}{n}(x-1) \right) dx$$

である。ここで

$$\int_1^{n+1} \log x dx = (n+1) \log(n+1) - n$$

かつ

$$\int_1^{n+1} \frac{\log(n+1)}{n}(x-1) dx = \frac{n}{2} \log(n+1)$$

である。したがって $S_n = \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \log(n+1) - n$ である。

次に C_2 と直線 PQ の差を計算する。(1) より $a + \frac{\log(n+1)}{n} = n+1$ であるから $\frac{\log(n+1)}{n}(x-1) - (x-1)(x-a) = (x-1)(n+1-x)$ である。これは $1 \leq x \leq n+1$ で非負なので、

$$T_n = \int_1^{n+1} (x-1)(n+1-x) dx$$

である。 $u = x - 1$ とおくと

$$T_n = \int_0^n u(n-u) du = \left[\frac{nu^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^n = \frac{n^3}{6}$$

である。よって $T_n = \frac{n^3}{6}$ である。

(3)

(2) より

$$\frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) \log(n+1) - n}{n \log(n^3/6)}$$

である。分子と分母を $n \log n$ で割ると

$$\frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{\log n} - \frac{1}{\log n}}{\frac{\log(n^3/6)}{\log n}}$$

である。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^3/6)}{\log n} = 3$$

だから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{1}{6}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

面積を「曲線下の面積と弦下の台形の差」として捉える。放物線と弦の差は、両端を零点にもつ 2 次式であることから直ちに因数分解できる。極限は $S_n/(n \log n)$ と $\log T_n/\log n$ を別々に評価する。

【解答】

(1) $x = n+1$ が交点の x 座標なので

$$\log(n+1) = n(n+1-a).$$

したがって

$$a = n+1 - \frac{\log(n+1)}{n}.$$

ここで $h(u) = u - \log(1+u)$ とおくと

$$h(0) = 0, \quad h'(u) = \frac{u}{1+u} > 0 \quad (u > 0)$$

である。ゆえに $\log(n+1) < n$ であり、

$$a > n \geq 1.$$

したがって $a > 1$ である。

(2) 弦 PQ の下の面積は、幅 n 、両端の高さ $0, \log(n+1)$ の台形の面積だから

$$\frac{n}{2} \log(n+1)$$

である。一方

$$\int_1^{n+1} \log x dx = (n+1) \log(n+1) - n.$$

対数曲線は弦の上側にあるので

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1) \log(n+1) - n - \frac{n}{2} \log(n+1) \\ &= \left(\frac{n}{2} + 1\right) \log(n+1) - n. \end{aligned}$$

次に、弦と C_2 の高さの差は 2 次式であり、 $x = 1, n+1$ で 0、2 次の係数は -1 である。よって

$$(\text{弦}) - (C_2) = (x-1)(n+1-x).$$

$x = 1 + nu$ とおくと

$$\begin{aligned} T_n &= n^3 \int_0^1 u(1-u) du \\ &= n^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{n^3}{6}. \end{aligned}$$

(3)

$$\varepsilon_n = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

とおけば

$$\log(n+1) = \log n + \varepsilon_n, \quad 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}.$$

したがって

$$\frac{S_n}{n \log n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{\log n} \right) - \frac{1}{\log n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

また

$$\frac{\log T_n}{\log n} = \frac{3 \log n - \log 6}{\log n} \rightarrow 3.$$

よって

$$\frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{S_n / (n \log n)}{\log T_n / \log n} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

【総評】 難度 6、計算量 6。対数曲線と放物線を同じ弦で比較する問題で、式変形の見通しが大切である。目安時間は 18 分程度。 $a + \log(n+1)/n = n+1$ を使うと、 T_n の被積分関数が $(x-1)(n+1-x)$ に落ちる点が最大の短縮である。 S_n では対数曲線が弦より上にあること、 T_n では直線から放物線を引く向きが非負になることを確認したい。極限は T_n そのものではなく $\log T_n$ が分母にあるため、主要項を取り違えないこと。

【第 2 問】

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2:1$, $t:1-t$, $1:3$ に内分する点を D , E , F とする。また、 AE と BF , BF と CD , CD と AE の交点をそれぞれ P , Q , R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE , BF , CD が 1 点で交わる時の t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $AP = kAE$, $CR = lCD$ を満たす実数 k , l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

面積比はアフィン変換で保たれるので、三角形を扱いやすい座標に置いてよい。まず $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 1)$ として面積を 1 にそろえ、内分点 D, E, F の座標を出す。(1) は Ceva の定理で共点条件を確認し、(2) 以降は各直線をパラメータ表示して P, Q, R を求める。最後の面積は、座標の差の行列式を使うと符号と分母を一括して整理できる。

【解答】

$A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 1)$ とおく。この三角形の面積は 1 であり、内分比と面積比はこの座標化で変わらない。内分点は

$$D = \left(\frac{4}{3}, 0 \right), \quad E = (2(1-t), t), \quad F = \left(0, \frac{3}{4} \right)$$

である。

(1)

$AD : DB = 2 : 1$, $BE : EC = t : (1 - t)$, $CF : FA = 1 : 3$ である。3 直線 AE , BF , CD が 1 点で交わるための Ceva の条件は $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ であるから、 $2 \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1}{3} = 1$ となる。これを解いて $2t = 3(1 - t)$, $5t = 3$ より $t_0 = \frac{3}{5}$ である。

(2)

P は AE 上にあるので、 $AP = kAE$ とおくと $P = (2k(1 - t), kt)$ である。また P は BF 上にもあるから、ある実数 s を用いて $P = B + s(F - B) = (2 - 2s, \frac{3}{4}s)$ と表せる。座標を比較すると $2k(1 - t) = 2 - 2s$, $kt = \frac{3}{4}s$ である。第 1 式から $s = 1 - k(1 - t)$ であり、これを第 2 式に代入して $kt = \frac{3}{4}\{1 - k(1 - t)\}$ すなわち $4kt = 3 - 3k + 3kt$, $k(t + 3) = 3$ を得る。したがって $k = \frac{3}{t + 3}$ である。

次に R は CD 上にあるので、 $CR = lCD$ とおくと $R = C + l(D - C) = (\frac{4l}{3}, 1 - l)$ である。また R は AE 上にもあるから、ある実数 u を用いて $R = uE = (2u(1 - t), ut)$ と表せる。座標を比較して $\frac{4l}{3} = 2u(1 - t)$, $1 - l = ut$ を得る。第 2 式から $u = (1 - l)/t$ であり、これを第 1 式に代入すると $\frac{4l}{3} = 2 \frac{1 - l}{t}(1 - t)$ である。よって $4lt = 6(1 - l)(1 - t)$, $l(6 - 2t) = 6(1 - t)$ となるから $l = \frac{3(1 - t)}{3 - t}$ である。

(3)

Q は BF と CD の交点である。 BF 上で $Q = (2 - 2s, \frac{3}{4}s)$ とおき、 CD 上で $Q = (\frac{4u}{3}, 1 - u)$ とおく。座標を比較すると $\frac{4u}{3} = 2 - 2s$, $1 - u = \frac{3}{4}s$ である。第 2 式から $s = \frac{4}{3}(1 - u)$ であり、これを第 1 式に代入して $\frac{4u}{3} = 2 - \frac{8}{3}(1 - u)$ より $4u = -2 + 8u$, $u = \frac{1}{2}$ を得る。したがって $Q = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ である。三角形 BCQ の面積は

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| -1 + \frac{4}{3} \right| = \frac{1}{6}$$

である。

(4)

(2) より

$$P = \left(\frac{6(1 - t)}{t + 3}, \frac{3t}{t + 3} \right), \quad R = \left(\frac{4(1 - t)}{3 - t}, \frac{2t}{3 - t} \right)$$

であり、(3) より $Q = (2/3, 1/2)$ である。したがって $\triangle PQR = \frac{1}{2} |\det(Q - P, R - P)|$ である。差を代入して分母を $(t + 3)(3 - t)$ にそろえると $\frac{1}{2} \det(Q - P, R - P) = \frac{(3 - 5t)^2}{6(9 - t^2)}$ となる。いま $0 < t < t_0 = 3/5$ なので分母 $9 - t^2$ は正であり、面積は $\frac{(3 - 5t)^2}{6(9 - t^2)}$ である。 $t = 3/5$ で 3 直線が共点となり、 P, Q, R が一致して面積が 0 になることも、この式と一致している。

▶ 解法 2

【方針】

三角形 ABC に関する正規化重心座標を使う。3 本の線分は重心座標の成分比だけで表せるため、共点条件と各交点を連立一次式で求められる。面積比は重心座標の 1 成分または 3 点の座標行列式から直接計算する。

【解答】

点 X を

$$X = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C, \quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$$

と表し、 $(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C)$ を X の重心座標とする。内分比から

$$D = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad E = (0, 1-t, t), \quad F = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$$

である。したがって 3 直線は

$$AE : t\lambda_B = (1-t)\lambda_C, \quad BF : \lambda_C = 3\lambda_A, \quad CD : \lambda_B = 2\lambda_A \quad (1)$$

と表せる。

(1) 3 式を同時に満たす点が存在するには、(1) より

$$2t\lambda_A = 3(1-t)\lambda_A$$

が必要である。三角形内の点なので $\lambda_A \neq 0$ であり、

$$2t = 3(1-t)$$

を得る。よって

$$t_0 = \frac{3}{5}$$

である。

(2) $P = AE \cap BF$ について (1) と成分和 1 を用いると

$$P = \left(\frac{t}{t+3}, \frac{3(1-t)}{t+3}, \frac{3t}{t+3}\right).$$

一方、 $P = (1-k)A + kE$ だから $P = (1-k, k(1-t), kt)$ である。第 3 成分を比べて

$$k = \frac{3}{t+3}$$

である。

同様に $R = CD \cap AE$ は

$$R = \left(\frac{1-t}{3-t}, \frac{2(1-t)}{3-t}, \frac{2t}{3-t}\right).$$

また $R = (1-l)C + lD$ の重心座標は

$$\left(\frac{l}{3}, \frac{2l}{3}, 1-l\right)$$

だから

$$l = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

である。

(3) $Q = BF \cap CD$ では

$$\lambda_C = 3\lambda_A, \quad \lambda_B = 2\lambda_A.$$

成分和が 1 なので

$$Q = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

重心座標の第 1 成分は $[BCQ]/[BCA]$ に等しい。問題では $[ABC] = 1$ だから

$$[BCQ] = \frac{1}{6}$$

である。

(4) 三角形内の 3 点の重心座標を行に並べた行列式の絶対値は、もとの三角形に対する面積比に等しい。よって

$$\begin{aligned} [PQR] &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{t}{t+3} & \frac{3(1-t)}{t+3} & \frac{3t}{t+3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1-t}{3-t} & \frac{2(1-t)}{3-t} & \frac{2t}{3-t} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{(3-5t)^2}{6(9-t^2)}. \end{aligned}$$

$0 < t < 3/5$ では分母は正であるから、絶対値の処理にも問題はない。

【総評】 難度 7、計算量 7。内分比から交点と面積を求める典型問題だが、文字 t が残るため、途中で比の向きや交点名を取り違えると最後の式が大きく崩れる。(1) の Ceva は短く済む一方、(2) 以降は座標を一貫して使うのが最も安定する。目安時間は 20 分前後。得点源は D, E, F の座標、 k, l の導出、 Q の固定値、最後の行列式整理である。特に $E = (2(1-t), t)$, $F = (0, 3/4)$ の比の向き、また $0 < t < 3/5$ の範囲で面積の符号を確認することが重要である。

【第 3 問】

座標平面上で円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正六角形で、点 $P_0(1, 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則)

- (i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば、コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。
- (ii) 6 の目が出た場合は、 x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが x 軸上にあるときは動かない。例えば、コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
- (2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
- (3) n を自然数とする。 n 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

現在どの頂点にいても、次の 1 回で P_0 に移るサイコロの目がちょうど 1 つだけあることを確認する。すると、直前の位置の分布がどのようなものでも、次の 1 回で P_0 にいる条件付き確率は常に $1/6$ である。全確率の考え方で、2 回後・3 回後・一般の n 回後を同じ理由で処理する。

【解答】

各頂点から、次の 1 回で P_0 に移る目を調べる。

P_0 にいるときは、6 の目が出ると x 軸に関して対称な位置、すなわち P_0 自身にとどまる。1 から 5 の目では P_0 以外へ移るので、 P_0 から P_0 へ移る目は 6 だけである。

P_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) にいるときは、1 から 5 の目で反時計まわりに進む。 P_j から P_0 に戻るには、頂点番号を 6 で割った余りで考えて $j + r \equiv 0 \pmod{6}$ となる目 r が必要である。これは

現在位置	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0 へ移る目	5	4	3	2	1

のように、各頂点でちょうど1つずつ存在する。6の目による対称移動は、 P_1 と P_5 、 P_2 と P_4 を入れ替え、 P_3 は動かさないで、これも上の唯一性を崩さない。

したがって、ある回の直前にどの頂点にいても、次の1回で P_0 にいる確率は常に $\frac{1}{6}$ である。

(1)

1回投げた後の位置がどこであっても、2回目で P_0 に移る確率は $1/6$ である。よって $\frac{1}{6}$ である。

(2)

2回投げた後の位置がどこであっても、3回目で P_0 に移る確率は $1/6$ である。したがって3回後に P_0 にある確率も $\frac{1}{6}$ である。

(3)

n は自然数である。 $n-1$ 回投げた後の位置がどの頂点であっても、次の1回で P_0 に移る目はちょうど1つである。よって全確率を足し合わせると、 n 回後に P_0 にある確率は

$$\sum_{j=0}^5 P(n-1\text{回後に}P_j\text{にいる}) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^5 P(n-1\text{回後に}P_j\text{にいる}) = \frac{1}{6}$$

である。したがって $\frac{1}{6}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

1回後に6頂点へ一様に分布することを示し、その一様分布が次の1回でも保たれることを帰納的に証明する。各目による移動が頂点集合の置換であるため、どの到着頂点にも同じ総確率が流れ込む。

【解答】

最初の位置は P_0 である。1から5の目ではそれぞれ

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$$

へ移り、6の目では P_0 にとどまる。したがって1回後には6頂点のどこにいる確率も $1/6$ であり、一様に分布している。

この一様分布が1回の操作で保たれることを示す。到着先 P_k を1つ固定する。1から5の各目 r について、反時計回りに r 個進んで P_k に着く出発点はただ1つある。よって、1から5の目によって P_k へ入る確率の合計は

$$5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

また、 x 軸対称は頂点集合上の1対1対応であるから、6の目によって P_k に着く出発点もただ1つである。その確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

したがって次の回の後に P_k にいる確率は

$$\frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

これは $k=0,1,\dots,5$ のすべてで成り立つ。よって帰納法により、1回以上投げた後の位置は常に6頂点上の一様分布である。

したがって

$$(1) \quad \frac{1}{6}, \quad (2) \quad \frac{1}{6}, \quad (3) \quad \frac{1}{6}$$

である。

【総評】 難度4、計算量3。見かけは確率過程の問題だが、各頂点から P_0 に入る目が1つだけという対称性を見抜けば非常に短い。目安時間は8分程度。2回後、3回後を個別に樹形図で計算し始めると手間が増えるため、まず「直前の位置によらない」性質を確認したい。注意点は、6の目では反時計まわりに6進むのではなく、 x 軸対称に移ること、また P_0 は6の目でその場に残ることである。

【第 4 問】

自然数 n に対して、 10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。 a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_6$ を求めよ。
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。
 - (ii) N を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
 - (iii) N は 13 で割り切れる。

▶ 解法 1

【方針】

まず $10^{n+1} = 10 \cdot 10^n$ を使い、余りを次々に出す仕組みを証明する。6 桁の数は $A2016B = 100000A + 20160 + B$ と表せるので、(2) で求めた 10^5 の余りと 20160 の余りを使って、 A と B の合同条件に落とし込む。最後は $A = 1, 2, \dots, 9$ を調べ、 $0 \leq B \leq 9$ を満たすものだけを残す。

【解答】

(1)

10^n を 13 で割った商を q 、余りを a_n とすると $10^n = 13q + a_n$ と書ける。両辺を 10 倍して $10^{n+1} = 13(10q) + 10a_n$ となる。したがって 10^{n+1} を 13 で割った余りは、 $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。よって a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りである。

(2)

(1) を順に用いる。 $a_1 = 10$ であり、

$$10a_1 = 100 \equiv 9, \quad 10a_2 = 90 \equiv 12, \quad 10a_3 = 120 \equiv 3 \pmod{13}$$

さらに $10a_4 = 30 \equiv 4, \quad 10a_5 = 40 \equiv 1 \pmod{13}$ である。したがって $a_1 = 10, a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$ である。

(3)

条件 (i)(ii) より、 N は $N = A2016B = 100000A + 20160 + B$ と書ける。ただし A は 1 から 9 までの整数、 B は 0 から 9 までの整数である。

(2) より 10^5 を 13 で割った余りは $a_5 = 4$ である。また $20160 = 13 \cdot 1550 + 10$ であるから、 N が 13 で割り切れる条件は $4A + 10 + B \equiv 0 \pmod{13}$ すなわち $B \equiv 3 - 4A \pmod{13}$ である。

$A = 1, 2, \dots, 9$ について、 $0 \leq B \leq 9$ を満たすものを調べると

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3 - 4A \pmod{13}$	12	8	4	0	9	5	1	10	6

である。よって許される組は $(A, B) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$ である。したがって求める自然数は **220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166** である。

▶ 解法 2

【方針】

合同式だけで処理する。余りの列は $10 \equiv -3 \pmod{13}$ から順に作る。(3) では先頭桁を A , 末尾桁を B とし, $4A + B$ の取り得る範囲を使って, 合同式を 3 本の通常の一次方程式へ変える。

【解答】

(1)

$$10^n \equiv a_n \pmod{13}$$

の両辺を 10 倍すると

$$10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}.$$

a_{n+1} は $0, 1, \dots, 12$ のうちこの合同式を満たす唯一の数だから, $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2) $10 \equiv -3 \pmod{13}$ から順に掛けると

$$\begin{aligned} 10^1 &\equiv 10, & 10^2 &\equiv 9, & 10^3 &\equiv 12, \\ 10^4 &\equiv 3, & 10^5 &\equiv 4, & 10^6 &\equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

したがって

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (10, 9, 12, 3, 4, 1)$$

である。

(3) 条件 (i)(ii) を満たす数を

$$N = A2016B = 100000A + 20160 + B$$

と書く。ただし $1 \leq A \leq 9$, $0 \leq B \leq 9$ である。(2) より

$$100000 \equiv 4, \quad 20160 \equiv 10 \pmod{13}$$

だから

$$N \equiv 4A + B + 10 \pmod{13}.$$

よって N が 13 の倍数である条件は

$$4A + B \equiv 3 \pmod{13}. \quad (1)$$

一方 $4 \leq 4A + B \leq 45$ である。この範囲で (1) を満たす数は

$$16, \quad 29, \quad 42$$

だけである。それぞれについて $0 \leq B \leq 9$ を満たす解を求めると

$4A + B$	(A, B)
16	(2, 8), (3, 4), (4, 0)
29	(5, 9), (6, 5), (7, 1)
42	(9, 6)

となる。したがって求める自然数は

$$220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166$$

である。

【総評】 難度 4、計算量 4。13 での余りの周期と、6 桁整数の表し方を結びつける整数問題である。目安時間は 10 分程度。(1)(2) を丁寧に書けば、(3) は A と B の 1 次合同式になる。誤りやすいのは、 $A2016B$ を $100000A + 20160 + B$ と表すところ、また B が 1 桁の数字なので 0 も許される一方で 10, 12 は許されないところである。表を作って候補を削ると、最後の列挙が安定する。

【第 5 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数, i を虚数単位とし, z を $z = \cos \theta + i \sin \theta$ で表される複素数とする。このとき, 整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

- (2) 次の方程式を満たす実数 x ($0 \leq x < 2\pi$) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

- (3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $|z| = 1$ から $1/z$ が共役複素数になることを使い, z^n と $1/z^n$ の和差で実部・虚部を取り出す。(2) は三倍角・二倍角を用いて $\cos x$ の 3 次方程式に直し、範囲内の角を列挙する。(3) は $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ に変換し, $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ$ を和積公式で整理する。

【解答】

(1)

$|z| = 1$ なので $\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$ である。また、整数 n に対して

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

が成り立つ。 n が負の場合も、 $z^{-k} = 1/z^k$ と考えれば同じ式で表せる。

この 2 式を足すと $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ であり、引くと $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$ である。したがって

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

である。

(2)

$c = \cos x$ とおく。二倍角・三倍角の公式より $\cos 2x = 2c^2 - 1$, $\cos 3x = 4c^3 - 3c$ である。与えられた方程式は $c + (2c^2 - 1) - (4c^3 - 3c) = 1$ すなわち $-4c^3 + 2c^2 + 4c - 2 = 0$ である。因数分解すると $-2(c-1)(c+1)(2c-1) = 0$ であるから $c = 1, -1, \frac{1}{2}$ である。 $0 \leq x < 2\pi$ より $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ である。

(3) $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned} & \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ &= 2 - \frac{1}{2} (\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ) \end{aligned}$$

である。ここで和積公式より

$$\cos 40^\circ + \cos 160^\circ = 2 \cos 100^\circ \cos(-60^\circ) = \cos 100^\circ$$

である。また $\cos 100^\circ + \cos 80^\circ = 2 \cos 90^\circ \cos 10^\circ = 0$ である。したがって

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

である。よって

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = 2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}$$

となり、示された。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は加法定理を使った帰納法で De Moivre の公式を証明する。(2) は 3 倍角の多項式へ直さず、和積公式で左辺を積に因数分解する。(3) は 9 乗根の和の実部を使い、8 個の正弦平方和を求めて対称性で半分にする。

【解答】

(1) まず $n \geq 0$ について

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1)$$

を帰納法で示す。 $n = 0$ では明らかである。(1) が n で成り立つとき、両辺に $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を掛け、加法定理を用いると

$$z^{n+1} = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)$$

となる。負の整数 $n = -m$ については

$$z^{-m} = \overline{z^m} = \cos m\theta - i \sin m\theta = \cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)$$

だから、(1) はすべての整数で成り立つ。

さらに

$$z^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

である。和と差を取れば

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}(z^n - z^{-n})$$

を得る。

(2) 与式の左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned} & \cos x + \cos 2x - \cos 3x - 1 \\ &= (\cos x - \cos 3x) + (\cos 2x - 1) \\ &= 2 \sin 2x \sin x - 2 \sin^2 x \\ &= 2 \sin^2 x (2 \cos x - 1). \end{aligned}$$

したがって

$$\sin x = 0 \quad \text{または} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

$0 \leq x < 2\pi$ より

$$x = 0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{3}$$

である。

(3)

$$\omega = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$$

とおくと、 $\omega^9 = 1$, $\omega \neq 1$ だから

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^8 = 0.$$

実部を取って

$$\sum_{k=1}^8 \cos(40k^\circ) = -1.$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \sin^2(20k^\circ) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \{1 - \cos(40k^\circ)\} \\ &= 4 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

また

$$\sin^2(20(9-k)^\circ) = \sin^2(20k^\circ)$$

であるから、 $k = 1, 2, 3, 4$ の和は全体の半分である。したがって

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

が成り立つ。

【総評】 難度 5、計算量 4。複素数表示、三倍角、三角恒等式を順に確認する問題である。目安時間は 15 分程度。(1) は和と差で実部・虚部を取り出すだけだが、整数 n に負の場合が含まれても式が崩れないことを一言添えるとよい。(2) は因数分解後、 $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で角を漏れなく列挙する。(3) は 40° を (2) の解に代入する問題ではないため、無理に (2) を使わず、 $\sin^2$ を余弦に直して和積公式で余弦和を処理するのが安全である。