

九州大学 2017 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上の曲線 $C: y = \sqrt{x} \ (x \geq 0)$ を考える。 C 上の異なる 2 点 $P(p, \sqrt{p})$, $Q(q, \sqrt{q})$ ($p > 0, q > 0$) における、それぞれの法線 l_1, l_2 を考える。法線 l_1 と l_2 の交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を p と q で表せ。

(2) q が p に限りなく近づくとき、線分 RP の長さの極限値を p で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

$u = \sqrt{p}$, $v = \sqrt{q}$ とおくと、曲線上の点は (u^2, u) , (v^2, v) となり、法線の傾きはそれぞれ $-2u, -2v$ で表せる。2 本の法線を連立して交点 R を求める。 $q \rightarrow p$ は $v \rightarrow u$ として座標の極限を取り、最後に極限位置と P との距離を計算する。

【解答】

(1) $u = \sqrt{p}$, $v = \sqrt{q}$ とおく。すると $P = (u^2, u)$, $Q = (v^2, v)$ である。曲線 $y = \sqrt{x}$ の導関数は $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ なので、点 (u^2, u) における接線の傾きは $\frac{1}{2u}$, 法線の傾きは $-2u$ である。したがって P における法線は $y - u = -2u(x - u^2)$ である。同様に、 Q における法線は $y - v = -2v(x - v^2)$ である。

2 式を $y = -2ux + 2u^3 + u$, $y = -2vx + 2v^3 + v$ と書いて連立する。 $u \neq v$ であるから、差を取って $2(v - u)x + 2(u^3 - v^3) + (u - v) = 0$ となる。 $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ を用いると $2x - 2(u^2 + uv + v^2) - 1 = 0$ である。よって $x = u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}$ である。これを $y = -2ux + 2u^3 + u$ へ代入すると $y = -2uv(u + v) = -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$ となる。したがって $R = (p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}, -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q}))$ である。

(2) $q \rightarrow p$ のとき、 $v = \sqrt{q} \rightarrow u = \sqrt{p}$ である。したがって (1) の結果から $R \rightarrow (3p + \frac{1}{2}, -4p\sqrt{p})$ である。 $P = (p, \sqrt{p})$ なので、極限位置との差は $(2p + \frac{1}{2}, -(4p + 1)\sqrt{p})$ である。よって線分 RP の長さの極限は

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(2p + \frac{1}{2}\right)^2 + (4p + 1)^2 p} &= \sqrt{(4p + 1)^2 \left(\frac{1}{4} + p\right)} \\ &= \sqrt{(4p + 1)^2 \cdot \frac{4p + 1}{4}} \\ &= \frac{(4p + 1)^{3/2}}{2} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

曲線を $x = t^2$, $y = t$ と媒介変数表示し, 法線の式を t で表す。交点から P への差を先に計算し, $v \rightarrow u$ の極限を直接取る。

【解答】

(1) $u = \sqrt{p}$, $v = \sqrt{q}$ とする。曲線上の点 (t^2, t) における法線は

$$y - t = -2t(x - t^2)$$

である。 $t = u, v$ の 2 式を引き, $u \neq v$ を用いると

$$x = u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2}, \quad y = -2uv(u + v).$$

したがって

$$R = \left(p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}, -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) \right).$$

(2) $P = (u^2, u)$ なので

$$\overrightarrow{PR} = \left(uv + v^2 + \frac{1}{2}, -2uv(u + v) - u \right).$$

$q \rightarrow p$, すなわち $v \rightarrow u$ とすると

$$\overrightarrow{PR} \rightarrow \left(2p + \frac{1}{2}, -(4p + 1)\sqrt{p} \right).$$

ゆえに長さの極限は

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(2p + \frac{1}{2}\right)^2 + (4p + 1)^2 p} &= \sqrt{(4p + 1)^2 \left(p + \frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{(4p + 1)^{3/2}}{2}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 18 分。 $\sqrt{p}, \sqrt{q}$ を文字に置き換えると, 法線の傾きと交点計算がかなり整理される。法線の傾きは接線の傾きの負の逆数であるため, $-2\sqrt{p}$ の符号を誤らないことが重要である。(2) は直接距離を極限にするより, まず R の座標の極限を取り, その後に P との差を平方で整理すると見通しがよい。

【第 2 問】

1 個のさいころを 4 回投げ, 1 回目に出た目の数を a , 2 回目に出た目の数を b , 3 回目に出た目の数を c , 4 回目に出た目の数を d とする。 d が, a と b と c の最大公約数の倍数となる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

最初の 3 回の出目 (a, b, c) について, 最大公約数 g ごとに組数を数える。 g が決まれば, 4 回目の出目 d が g の倍数である選び方は $\lfloor 6/g \rfloor$ 通りである。 $g = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について, 出目が 1 から 6 に限られることを利用して個数を具体的に求め, 最後に全事象 6^4 で割る。

【解答】

(a, b, c) の最大公約数を g とする。 d が g の倍数であるための d の選び方は $\left\lfloor \frac{6}{g} \right\rfloor$ 通りである。したがって, まず (a, b, c) の最大公約数が各 g になる個数を数える。 $g = 6$ となるのは $(a, b, c) = (6, 6, 6)$ だけなので 1 通りである。同様に $g = 5$ となるのは $(5, 5, 5)$ だけ, $g = 4$ となるのは $(4, 4, 4)$ だけで, それぞれ 1 通りである。 $g = 3$ となるには, a, b, c がすべて 3 の倍数であり, すべて 6 ではないことが必要十分である。3 の倍数は 3, 6 の 2 種類なので $2^3 - 1 = 7$ 通りである。 $g = 2$ となるには, a, b, c がすべて偶数であり, 3 つを 2 で割った数の最大公約数が 1 であればよい。偶数は 2, 4, 6 であり, 2 で割ると 1, 2, 3 である。1, 2, 3 から 3 個選ぶ全 3^3 通りのうち, 最大公約数が 1 でないのは $(2, 2, 2)$ と $(3, 3, 3)$ だけである。したがって $3^3 - 2 = 25$ 通りである。

全体の組数は $6^3 = 216$ 通りなので, $g = 1$ となる組数は $216 - (25 + 7 + 1 + 1 + 1) = 181$ である。

以上より, 条件を満たす (a, b, c, d) の個数は $181 \cdot 6 + 25 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1178$ である。全事象は $6^4 = 1296$ 通りなので, 求める確率は $\frac{1178}{1296} = \frac{589}{648}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

最大公約数が g の組数を, まず「 g の倍数だけからなる組」の総数を数え, より大きい最大公約数の組を差し引いて求める。

【解答】

M_g を a, b, c がすべて g の倍数となる組数, E_g を最大公約数がちょうど g となる組数とする。すると

$$M_g = \left\lfloor \frac{6}{g} \right\rfloor^3.$$

大きい g から順に差し引くと

$$\begin{array}{c|cccccc} g & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline E_g & 181 & 25 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

を得る。例えば

$$E_3 = 2^3 - E_6 = 7, \quad E_2 = 3^3 - E_4 - E_6 = 25,$$

最後に

$$E_1 = 6^3 - (25 + 7 + 1 + 1 + 1) = 181$$

である。

最大公約数が g のとき, d の選び方は $\lfloor 6/g \rfloor$ 通りである。よって有利な 4 つ組は

$$181 \cdot 6 + 25 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 1 + 1 + 1 = 1178$$

通りである。全事象は $6^4 = 1296$ 通りだから, 求める確率は

$$\frac{1178}{1296} = \frac{589}{648}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 18 分。最大公約数を直接扱うより, g ごとに最初の 3 個の組数を分けると整理しやすい。 $g = 2$ の 25 通りと $g = 3$ の 7 通りが主な計算箇所, ここを曖昧にすると総数がずれる。最後に d の選択肢 $\lfloor 6/g \rfloor$ を掛ける段階と, 全事象 6^4 で割る段階を分けて書くと採点者が追やすい。

【第 3 問】

座標空間内に点 $A(0, 0, 2)$, 点 $B(2, 0, 0)$, 点 $C(0, 0, -2)$, 点 $D(0, -2, 0)$ がある。線分 AC を $1:3$ に内分する点を E とし, 線分 AD を $1:3$ に内分する点を F とする。直線 BC と平面 $x = \frac{3}{2}$ の交点を G とする。直線 BD と平面 EFG の交点を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 E, F, G, H の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 三角形 FGH の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

内分点 E, F をまず求め, G は直線 BC をパラメータ表示して $x = 3/2$ を代入する。平面 EFG は 3 点を代入して満たす一次方程式を求め, 直線 BD との交点を H とする。面積は H を基準に $\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HG}$ を取り, 内積公式 $\frac{1}{2}\sqrt{|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2}$ で求める。

【解答】

(1) 線分 AC を $1:3$ に内分する点 E は, A に近い側にあるので $E = \frac{3A+C}{4} = (0, 0, 1)$ である。同様に, 線分 AD を $1:3$ に内分する点 F は $F = \frac{3A+D}{4} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ である。

次に直線 BC を $(2, 0, 0) + \lambda\{(0, 0, -2) - (2, 0, 0)\} = (2 - 2\lambda, 0, -2\lambda)$ と表す。 $x = \frac{3}{2}$ より $2 - 2\lambda = \frac{3}{2}$ なので $\lambda = \frac{1}{4}$ である。よって $G = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ である。

平面 EFG を求める。3 点 E, F, G はいずれも $x + y + z = 1$ を満たすので, 平面 EFG は $x + y + z = 1$ である。直線 BD を $(2, 0, 0) + \mu\{(0, -2, 0) - (2, 0, 0)\} = (2 - 2\mu, -2\mu, 0)$ と表す。これを平面の式に代入すると $2 - 4\mu = 1$ であるから $\mu = \frac{1}{4}$ である。したがって $H = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ である。

(2) H を基準にすると

$$\overrightarrow{HF} = \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right), \quad \overrightarrow{HG} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

である。したがって

$$|\overrightarrow{HF}|^2 = \frac{9}{2}, \quad |\overrightarrow{HG}|^2 = \frac{1}{2}$$

であり、内積は $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HG} = -\frac{3}{4}$ である。よって三角形 FGH の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{HF}|^2 |\overrightarrow{HG}|^2 - (\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HG})^2}$$

であり、代入して

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

点と平面の座標はパラメータ表示で求める。面積は 2 辺の外積を直接計算し、その大きさの半分を取る。

【解答】

(1) 内分公式から

$$E = (0, 0, 1), \quad F = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

直線 BC を $(2-2t, 0, -2t)$ とおき $x = 3/2$ を代入すると $t = 1/4$ なので

$$G = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

3 点 E, F, G を通る平面は $x + y + z = 1$ である。直線 BD を $(2-2s, -2s, 0)$ を代入すると $s = 1/4$ だから

$$H = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

(2)

$$\overrightarrow{HF} = \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right), \quad \overrightarrow{HG} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

外積は

$$\overrightarrow{HF} \times \overrightarrow{HG} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

で、その大きさは $3\sqrt{3}/4$ である。したがって

$$[\triangle FGH] = \frac{1}{2} |\overrightarrow{HF} \times \overrightarrow{HG}| = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 20 分。点の座標はすべて素直に出るが、平面 EFG の式を早めに見つけると H の計算が短くなる。面積は空間内の三角形なので、平面に射影して考えるより、2 辺の長さや内積から求めるのが安定している。内分比 1:3 で $3A+C$ とする向き、直線 BD のパラメータの符号が主なミスの原因である。

【第 4 問】

k を $k \geq 0, k \neq 1$ を満たす実数として、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \{1 - (1 - k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

で定める。ただし、関数 $f(x)$ の定義域は、 $0 \leq k < 1$ のとき $0 \leq x \leq \frac{1}{1-k}$ であり、 $k > 1$ のとき $x \geq 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $k = 0$ のとき、 $0 < k < 1$ のとき、 $1 < k$ のときのそれぞれの場合について、関数 $y = f(x)$ の増減、グラフの凹凸、座標軸との交点を調べてグラフをかけ。

(3) $x \geq 0$ であるとき、

$$\lim_{k \rightarrow 1+0} \{1 - (1 - k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

を求めよ。ここで、自然対数の底 e が $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$ を満たすことを用いてよい。

▶ 解法 1

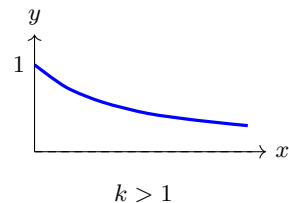
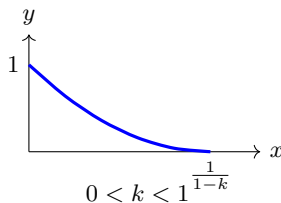
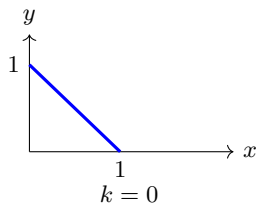
【方針】

底 $1 - (1 - k)x$ を X とおき、微分して $f'(x) = -f(x)^k$ 、さらに $f''(x) = kf(x)^{2k-1}$ を得る。 $k = 0, 0 < k < 1, k > 1$ で定義域と端点の様子が異なるので、増減、凹凸、切片を場合分けする。(3) は $h = k - 1$ と置き、 $(1 + hx)^{-1/h}$ を e^{-x} に帰着させる。

【解答】

(1) $X = 1 - (1 - k)x$ とおくと、 $f(x) = X^{1/(1-k)}$ である。 $X' = -(1 - k)$ なので $f'(x) = \frac{1}{1-k} X^{\frac{1}{1-k}-1} \{- (1 - k)\} = -X^{\frac{k}{1-k}}$ である。ここで $X^{1/(1-k)} = f(x)$ より $f'(x) = -f(x)^k$ である。

(2) さらに微分すると $f''(x) = -kf(x)^{k-1} f'(x) = kf(x)^{2k-1}$ である。 $k = 0$ のときは $f(x) = 1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$) である。したがって単調減少する直線で、凹凸はなく、座標軸との交点は $(0, 1), (1, 0)$ である。 $0 < k < 1$ のとき、定義域は $0 \leq x \leq \frac{1}{1-k}$ である。この範囲の内部で $f(x) > 0$ なので $f'(x) = -f(x)^k < 0$ であり、単調減少である。また $f''(x) = kf(x)^{2k-1} > 0$ なので、下に凸である。切片は $f(0) = 1, f\left(\frac{1}{1-k}\right) = 0$ より $(0, 1), \left(\frac{1}{1-k}, 0\right)$ である。 $k > 1$ のときは $f(x) = \{1 + (k - 1)x\}^{-1/(k-1)}$ ($x \geq 0$) である。やはり $f(x) > 0$ なので $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ であり、単調減少かつ下に凸である。 $f(0) = 1$ だから y 軸との交点は $(0, 1)$ である。一方で $x \geq 0$ では常に $f(x) > 0$ なので x 軸とは交わらない。また $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ であるから、 x 軸を漸近線として近づく。



(3) $h = k - 1$ とおくと、 $k \rightarrow 1 + 0$ のとき $h \rightarrow +0$ であり $1 - (1 - k)x = 1 + hx$, $\frac{1}{1-k} = -\frac{1}{h}$ である。したがって $\{1 - (1 - k)x\}^{1/(1-k)} = (1 + hx)^{-1/h}$ である。 $x = 0$ のときは明らかに極限は 1 で、これは e^0 である。 $x > 0$ のときは $(1 + hx)^{-1/h} = \{(1 + hx)^{1/(hx)}\}^{-x}$ であり、 $hx \rightarrow 0+$ だから、問題文で与えられた e の定義より $\lim_{k \rightarrow 1+0} \{1 - (1 - k)x\}^{1/(1-k)} = e^{-x}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

対数微分により f'/f を求め、そこから $f' = -f^k$ と $f'' = kf^{2k-1}$ を導く。極限は $h = k - 1$ において e の定義へ帰着する。

【解答】

(1) $X = 1 - (1 - k)x$ とする。対数微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-k} \frac{-(1-k)}{X} = -\frac{1}{X}.$$

$f/X = X^{k/(1-k)} = f^k$ なので

$$f'(x) = -f(x)^k.$$

(2) さらに

$$f''(x) = kf(x)^{2k-1}.$$

$k = 0$ では $f(x) = 1 - x$ で、 $(0, 1)$ と $(1, 0)$ を結ぶ減少直線である。 $0 < k < 1$ では $0 \leq x \leq 1/(1-k)$ 上で単調減少かつ下に凸で、切片は

$$(0, 1), \quad \left(\frac{1}{1-k}, 0 \right).$$

$k > 1$ でも単調減少かつ下に凸で、 y 切片は $(0, 1)$, x 軸とは交わらず、 $y = 0$ を漸近線とする。

(3) $h = k - 1$ とおくと

$$f(x) = (1 + hx)^{-1/h}.$$

$x > 0$ では

$$(1 + hx)^{-1/h} = \left\{ (1 + hx)^{1/(hx)} \right\}^{-x} \rightarrow e^{-x}.$$

$x = 0$ でも値は 1 なので、すべての $x \geq 0$ について極限は e^{-x} である。

【総評】 難度 6, 計算量 5. 目安時間は 24 分。微分計算そのものは短いですが、 k の範囲によって定義域と端点が変わるため、グラフの説明を丁寧に分ける必要がある。 $f'(x) = -f(x)^k$ まで整理できると増減は即座に分かり、 $f''(x) = kf(x)^{2k-1}$ で凹凸も統一的に判断できる。(3) は $h = k - 1$ の置換で指数の符号が負になる点に注意する。

【第 5 問】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の自然数 n に対して、 $a_{n+2} > 2a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) 2 以上の自然数 m は、数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 ($k \geq 2$) の項の和で表されることを、数学的帰納法によって示せ。

(3) (2) における項の個数 k は、 $k < 2 \log_2 m + 2$ を満たすことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

フィボナッチ型数列の基本性質を使う。(1) は $n \geq 2$ で $a_{n+1} > a_n$ を確認してから示す。(2) は m に関する帰納法で、 m 以下の最大の項 a_n を取り、残り $r = m - a_n$ が a_{n-1} 未満になることを使う。 $m = a_n$ の場合も $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ で 2 項に分ける。(3) は (1) から $a_j \geq 2^{(j-2)/2}$ を導き、 k 個の異なる項の最大添字が少なくとも k であることから項数を評価する。

【解答】

(1) まず $n \geq 2$ では数列は増加していることを確認する。実際、 $a_2 = 1 < a_3 = 2$ であり、その後は $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > a_n$ が成り立つ。したがって $n \geq 2$ では $a_{n+1} > a_n$ である。よって $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n > 2a_n$ が成り立つ。

(2) m に関する数学的帰納法で示す。 $m = 2$ のときは $2 = a_1 + a_2$ であり、互いに異なる 2 個の項の和で表される。 $2, 3, \dots, m-1$ について主張が成り立つと仮定し、 m について示す。 m 以下の最大の項を a_n とする。すなわち $a_n \leq m < a_{n+1}$ である。

もし $m = a_n$ なら、 $m \geq 2$ より $n \geq 3$ であり $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ だから、 m は互いに異なる 2 個の項の和で表される。

次に $m > a_n$ とする。このとき $r = m - a_n$ とおくと、 $r > 0$ である。また $m < a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ より $r < a_{n-1}$ である。 $r = 1$ なら $m = a_n + a_1$ と表せる。ここで $n \geq 3$ なので、 a_n と a_1 は異なる項である。 $r \geq 2$ なら、帰納法の仮定により、 r は互いに異なる 2 個以上の項の和で表される。しかも $r < a_{n-1}$ であるから、その表現に a_{n-1} 以上の項は現れない。したがって、そこに a_n を加えても項は重ならず、 m は互いに異なる項の和で表される。以上で帰納法が完了した。

(3) (1) より、添字を 2 つ進めるごとに値は 2 倍より大きくなる。特に $j \geq 2$ について $a_j \geq 2^{(j-2)/2}$ が成り立つ。これは $j = 2, 3$ で直接確かめられ、その後は (1) を繰り返せばよい。 m を互いに異なる k 個の項の和で表したとする。この k 個の項の中で最大の添字を r とすると、異なる添字が k 個あるので $r \geq k$ である。したがって最大の項は少なくとも a_k 以上である。また和 m は最大の項だけでなく他の正の項も含むので $m > a_k$ である。よって $m > a_k \geq 2^{(k-2)/2}$ となる。両辺の 2 を底とする対数をとると $\log_2 m > \frac{k-2}{2}$ であるから $k < 2\log_2 m + 2$ が成り立つ。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は単調増加性から示す。(2) は m 以下の最大の項を選ぶ貪欲法を強い帰納法として記述する。(3) は添字を 2 つ進めるごとの増加率から最大添字を評価する。

【解答】

(1) $n \geq 2$ では $a_{n+1} > a_n$ である。したがって

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n > 2a_n.$$

(2) m に関する強い帰納法を用いる。 $m = 2$ は $a_1 + a_2$ と表せる。 $2 \leq r < m$ で主張が成り立つと仮定し、 $a_n \leq m < a_{n+1}$ となる最大の項 a_n を取る。

$m = a_n$ なら

$$m = a_{n-1} + a_{n-2}$$

でよい。 $m > a_n$ なら $r = m - a_n$ とおく。 $m < a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ より $0 < r < a_{n-1}$ である。 $r = 1$ なら $m = a_n + a_1$ 、 $r \geq 2$ なら帰納法の仮定で r を互いに異なる項の和にできる。その各項は a_{n-1} より小さいため a_n と重ならない。よって主張が成り立つ。

(3) (1) を繰り返すと

$$a_j \geq 2^{(j-2)/2} \quad (j \geq 2).$$

m を異なる k 項の和で表したとき、最大添字は少なくとも k である。さらに最大項以外にも正の項があるので

$$m > a_k \geq 2^{(k-2)/2}.$$

底 2 の対数を取れば

$$k < 2\log_2 m + 2.$$

【総評】 難度 7, 計算量 5。目安時間は 28 分。フィボナッチ型数列を使った表現可能性の証明で、最大の項を引いて残りを帰納法に回す発想が中心である。 $m = a_n$ の場合を別に処理しないと、1 項だけの表現になってしまうので注意したい。(3) では和の最大項が a_k 以上で、さらに他の正の項も足されているため $m > a_k$ となる。この厳密な不等号が、結論の $<$ につながる。